

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

# Un Algoritmo parallelo per l'Equazione delle Onde nelle Applicazioni Geofisiche

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica  
di Riccardo Alessandrini  
Relatore: Prof. Maurizio Falcone

Oggetto di studio della tesi è l'equazione delle onde elastiche, consistente, nella sua forma generale in 3 dimensioni, di un sistema di 3 equazioni ognuna del secondo ordine. Le motivazioni che rendono interessante il suo studio sono legate alle applicazioni pratiche in campo sismologico. L'equazione, infatti, rappresenta un modello matematico che descrive la propagazione in un mezzo dell'onda generata da una sorgente sismica (forzante) posta in profondità. Lo studio dell'effetto dell'onda sismica che, come conseguenza della propagazione fra gli strati della crosta terrestre, viene provocato in superficie, causando danni a persone e cose, è l'obiettivo finale nello studio numerico di questo modello matematico, ma, come vedremo, questo studio presenta varie difficoltà, come l'approssimazione delle condizioni sul bordo artificiale del dominio limitato preso in esame, in particolare le condizioni che simulano l'effetto dell'onda sulla superficie terrestre.

Nella tesi, utilizziamo il metodo alle differenze finite per il calcolo della soluzione dell'equazione. Come noto, uno svantaggio di questo tipo di metodo numerico, è quello di essere vincolato dalla condizione di Courant-Friederichs-Levy (CFL) sulla scelta dei passi spaziale e temporale. In generale, tale vincolo, imponendo la scelta di un passo temporale "piccolo", rende necessario realizzare un numero alto d'iterazioni temporali per il calcolo del-

la soluzione. Nel caso specifico di fenomeni geofisici, come un terremoto, in cui la propagazione dell'onda causata dalla sorgente sismica può durare anche qualche secondo prima che il suo effetto sia avvertito in superficie, le simulazioni sperimentali sono molto lunghe in termini di tempo. Questo fatto può rendere il metodo numerico inutilizzabile.

Partendo da queste considerazioni teoriche e pratiche, si è cercato di realizzare un'approssimazione numerica dell'equazione delle onde elastiche per effettuare simulazioni interessanti da un punto di vista geofisico, cercando di superare il problema dei tempi d'esecuzione sopra esposto utilizzando la tecnica del *calcolo parallelo*. Questa tecnica si basa sull'utilizzo di più elaboratori che eseguono contemporaneamente un programma (o parti di esso), allo scopo di diminuire i tempi d'esecuzione. Abbiamo realizzato un algoritmo parallelo che sfrutta al meglio i vantaggi di tale tecnica di elaborazione. L'algoritmo parallelo sviluppato nel corso della tesi, permette di dividere il carico di elaborazione dei dati per il calcolo della soluzione dell'equazione delle onde in un dominio bidimensionale fra più processori.

Non sempre questo tipo di approccio risulta adeguato per la risoluzione di un problema computazionale. In alcuni casi, infatti, i vantaggi ottenuti sono scarsi in proporzione alle risorse utilizzate (numero di processori), in altri la tecnica di parallelizzazione può addirittura essere inutilizzabile. L'algoritmo parallelo realizzato per l'equazione delle onde elastiche, fornisce invece grandi vantaggi in termini di accelerazione del codice, vantaggi che abbiamo quantificato e discusso in questa tesi. Tale analisi specifica è, a nostro avviso, molto importante, perché mostra come l'algoritmo consenta la realizzazione di simulazioni d'interesse geofisico in tempi adeguati, "superando" il vincolo teorico imposto dalla condizione CFL, e rendendo l'approssimazione numerica utilizzabile per simulazioni realistiche.

## 1 Equazione delle onde elastiche

In questo capitolo è presentato un procedimento che porta alla formulazione dell'equazione delle onde elastiche. Indichiamo con il termine "spostamento" una funzione dello spazio e del tempo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  che rappresenta il vettore distanza (in  $\mathbb{R}^3$ ) di una particella al tempo  $t$  dalla posizione  $\mathbf{x}$  che essa occupa ad un tempo di riferimento  $t_0$ . Lo spostamento  $\mathbf{u}$  descrive matematicamente

la deformazione (cioè il cambiamento in forma e volume) di un corpo posto sotto l'azione di forze applicate. Introduciamo le seguenti definizioni:

**Definizione 1.** Si dice *tensore delle tensioni*, il tensore di componenti

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\text{dove } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

**Definizione 2.** Si dice *tensore degli sforzi* il tensore di componenti

$$\tau_{kl} = T_l(\mathbf{x}_k), \quad k, l = 1, 2, 3$$

dove con  $\mathbf{T}$  indichiamo il vettore di trazione.

La relazione che lega la trazione con il tensore degli sforzi è:

$$T_i = \sum_j \tau_{ji} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Indichiamo con  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  la *body force* che agisce (per unità di volume) al tempo  $t$  sulla particella originariamente sita sulla posizione  $\mathbf{x}$  ad un qualche tempo di riferimento, e con  $\rho$  la densità del corpo in cui si trova la particella. E' valida la seguente relazione:

$$\rho \ddot{u}_i = f_i + \sum_j \tau_{ji,j} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

che viene detta *equazione del moto*.

Abbiamo dimostrato il seguente fondamentale risultato:

**Teorema 1.** Il tensore degli sforzi è simmetrico, cioè

$$\tau_{kj} = \tau_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3 \quad (3)$$

La moderna generalizzazione della cosiddetta *Legge di Hooke* è che ogni componente del tensore degli sforzi è combinazione lineare di tutte le componenti del tensore delle tensioni, cioè esistono delle costanti  $c_{ijkl}$  tali che

$$\tau_{ij} = \sum_{p,q} c_{ijpq} e_{pq} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Si può dimostrare che, nel caso di un mezzo omogeneo isotropo, il numero delle costanti di elasticità si riduce a due, chiamate *costanti di Lamé*  $\lambda$  e  $\mu$ , e che la (4) si può scrivere come:

$$\tau_{ij} = \sum_k \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (5)$$

Dall'equazione del moto (2), dal Teorema (1) e dalla Legge di Hooke (5) si ricava

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (6)$$

La (6) è detta *Equazione delle onde elastiche* nella sua forma generale in 3 dimensioni. Abbiamo usato la seguente notazione:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{u})$$

Altre forme di rappresentazione dell'equazione molto usate sono:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad (7)$$

e

$$\ddot{\mathbf{u}} = \beta^2 \Delta \mathbf{u} + (\alpha^2 - \beta^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (8)$$

dove abbiamo usato le due quantità

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (9)$$

e supposto il forzante  $\mathbf{f}$  nullo.

Abbiamo infine dimostrato il seguente fondamentale risultato:

*un'onda elastica è essenzialmente costituita da due onde che si propagano l'una indipendentemente dall'altra.*

Una ha velocità  $\alpha$  (detta velocità longitudinale  $v_l$ ) e l'altra ha velocità  $\beta$  (detta velocità trasversale  $v_t$ ).

## 2 Approssimazione numerica

Dopo una breve introduzione sulle derivate discrete e su un semplice esempio di approssimazione unidimensionale con differenze finite, discutiamo un'approssimazione numerica dell'equazione delle onde elastiche (7), che, nel caso 2-dimensionale, si scrive come:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}] - \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] = f \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial x} [\mu (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})] = g \end{cases} \quad (10)$$

dove  $(x, z, t) \in \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega$  dominio in  $\mathbb{R}^2$ ,  $T > 0$ . con condizioni iniziali omogenee:

$$u(x, z, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, 0) = w(x, z, 0) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, z, 0) = 0, \quad (x, z) \in \Omega$$

Passiamo dal sistema di equazioni (10) a un sistema del primo ordine. Definiamo il vettore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$  di componenti:

$$\begin{cases} v_1 = u_t \\ v_2 = w_t \\ v_3 = (\lambda + 2\mu)u_x + \lambda w_z = \tau_{xx} \\ v_4 = (\lambda + 2\mu)w_z + \lambda u_x = \tau_{zz} \\ v_5 = \mu(u_z + w_x) = \tau_{xz} \end{cases} \quad (11)$$

Si ottiene il sistema:

$$\mathbf{v}_t + A^x \mathbf{v}_x + A^z \mathbf{v}_z = \mathbf{d} \quad (12)$$

dove

$$\mathbf{d} = \left( \frac{f}{\rho}, \frac{g}{\rho}, 0, 0, 0 \right)^t$$

$$A^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Approssimiamo ora tramite il metodo alle differenze finite il sistema (12). Diagonalizziamo le due matrici  $A^x$  e  $A^z$ :

$$L^x A^x R^x = C \Rightarrow A^x = R^x C L^x \quad (14)$$

$$L^z A^z R^z = C \Rightarrow A^z = R^z C L^z \quad (15)$$

Definiamo per  $s = x, z$ :

$$A^{s+} = R^s C^+ L^s \quad e \quad A^{s-} = R^s C^- L^s \quad (16)$$

Indichiamo l'approssimazione del vettore  $\mathbf{v}$  come:

$$\mathbf{v}_{jl}^n \sim \mathbf{v}(x_j, z_l, t_n)$$

La soluzione del sistema (12) si può quindi approssimare con il seguente schema:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{jl}^{n+1} = & \mathbf{v}_{jl}^n - \frac{\Delta t}{\Delta h} [A_{j,l}^{x+}(\mathbf{v}_{jl}^n - \mathbf{v}_{j-1l}^n) + A_{j,l}^{x-}(\mathbf{v}_{j+1l}^n - \mathbf{v}_{jl}^n) + \\ & + A_{j,l}^{z+}(\mathbf{v}_{jl}^n - \mathbf{v}_{jl-1}^n) + A_{j,l}^{z-}(\mathbf{v}_{jl+1}^n - \mathbf{v}_{jl}^n)] + \mathbf{d}_{jl}^n \Delta t \end{aligned} \quad (17)$$

La condizione di stabilità per questo schema numerico è (vedi [CE2]):

$$\frac{\Delta t}{\Delta h} \leq \frac{1}{\alpha \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}} \quad (18)$$

Si dicono *condizioni di superficie libera* le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \mu(u_z + w_x) = 0 \\ \tau_{zz} = \lambda(u_x + w_z) + 2\mu w_z = 0 \end{cases} \quad (19)$$

A partire da tali condizioni fisiche, si ricava lo schema sui punti del bordo superiore, che simula sperimentalmente la superficie terrestre:

$$\begin{cases} v_{1N_i}^n = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta h} \frac{1}{\rho} \left( v_{5N-1i}^n - v_{3N-1i}^n - 4\mu \frac{\mu+\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{\Delta t}{\Delta h} v_{1N-1i}^n + v_{3N_i}^{n-1} \right) + v_{1N_i}^{n-1}}{\det A} \\ v_{3N_i}^n = \frac{4\mu \frac{\mu+\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{\Delta t}{\Delta h} \left[ -v_{1N-1i}^n + \frac{\Delta t}{\Delta h} \frac{1}{\rho} \left( v_{5N-1i}^n - v_{3N-1i}^n \right) + v_{1N_i}^{n-1} \right] + v_{3N_i}^{n-1}}{\det A} \\ v_{3N_i}^n = 4\mu \frac{\mu+\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{\Delta t}{\Delta h} (v_{1N_i}^n - v_{1N-1i}^n) + v_{3N_i}^{n-1} \\ v_{4N_i}^n = 0 \\ v_{5N_i}^n = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$2 \leq i \leq N-1, n \geq 0$$

dove

$$A \in Mat(2 * 2) \quad \det A = 1 - 4\mu \frac{\mu + \lambda}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\Delta t}{\Delta h} \right)^2 \frac{1}{\rho}$$

Osserviamo che, rispettando la condizione CFL (18), la matrice  $A$  non può essere singolare.

### 3 Algoritmi paralleli

Un computer parallelo è un insieme di processori in grado di lavorare in cooperazione per risolvere un problema computazionale. Questa definizione è abbastanza ampia da includere i supercomputers in parallelo che hanno

centinaia di processori, networks o workstations. L'utilizzo contemporaneo di più processori ha lo scopo di diminuire notevolmente il tempo di esecuzione rispetto ai tradizionali algoritmi seriali. Dopo aver presentato brevemente alcuni esempi di Architetture di computers paralleli quali il Multiprocessore (o shared-memory MIMD), il MIMD a memoria distribuita e il SIMD computer, abbiamo esposto le idee principali per la progettazione di un algoritmo parallelo. E' fondamentale tener conto delle fasi di comunicazione e sincronizzazione fra i processori, che portano ovviamente ad una perdita di tempo nell'esecuzione e ad uno spreco di risorse. La tecnica di parallelizzazione *dinamica* può, in casi di forte sbilanciamento di carico, migliorare le prestazioni rispetto a quella *statica*.

Allo scopo di quantificare le prestazioni di un algoritmo parallelo, vengono introdotte le seguenti funzioni, dipendenti dal numero di processori usati  $P$ :

**Definizione 3.** Lo speed-up è  $S(P) = \frac{T_s}{T_p}$ , dove con  $T_p$  indichiamo il tempo di esecuzione ottenuto su  $P$  processori, e con  $T_s$  il tempo di esecuzione sequenziale.

**Definizione 4.** Si dice efficienza la grandezza  $E(P) = \frac{S(P)}{P}$ .

Al variare di  $P$ , lo speed-up e l'efficienza rappresentano delle misure, rispettivamente, dell' accelerazione del codice parallelo rispetto a quello seriale e della potenza computazionale dei processori effettivamente sfruttata. Indicando con  $\alpha$  la percentuale di codice parallelo in un algoritmo, è valida la seguente relazione:

$$S = \frac{1}{(1 - \alpha) + \frac{\alpha}{P}} \quad (21)$$

che è nota come *Legge di Amdahl*. La relazione quantifica l'impatto che la parte sequenziale ha sull'accelerazione del codice parallelo. Essa esprime anche il fatto che la componente sequenziale di un algoritmo limita lo speed-up che può essere raggiunto:

**Teorema 2.** Sia  $\frac{1}{\tau}$  la percentuale di parte sequenziale del codice. Allora si ha  $S \leq \tau$ .

Il problema dell'equazione delle onde elastiche è evolutivo, cioè viene calcolata la soluzione approssimata in determinati istanti di tempo con passo  $\Delta t$ .

Lo schema (17) non può essere parallelizzato sull'indice temporale  $n$ . Abbiamo quindi realizzato una parallelizzazione sulla parte spaziale perché il calcolo della soluzione sui nodi della griglia avviene ad ogni passo temporale e il numero  $N$  di nodi è tanto più grande quanto più si desidera precisione nel calcolo della soluzione.

La griglia di calcolo  $D = \{(x_i, z_j) : 0 \leq i, j \leq N - 1\}$  viene divisa in due parti per simulare le diverse caratteristiche del dominio in esame:

$$D_1 = \{(x_i, z_j) : 0 \leq i \leq N - 1, 0 \leq j \leq M - 1\}$$

$$D_2 = \{(x_i, z_j) : 0 \leq i \leq N - 1, M \leq j \leq N - 1\}$$

dove  $M$  indica la linea di separazione fra i due mezzi. Viene diviso fra le macchine il calcolo della soluzione prima sulle righe di  $D_1$  e poi su quelle di  $D_2$ . La scelta di tale strategia di risoluzione, è motivata dal fatto che i due domini hanno caratteristiche fisiche in generale diverse, poiché simulano la situazione fisica reale di discontinuità della crosta terrestre.

### 3 Test numerici

Dei vari test realizzati, quelli specifici sulle prestazioni dell'algoritmo e le simulazioni geofisiche, presentiamo i più significativi. Riportiamo nelle due tabelle seguenti i valori ottenuti sperimentalmente per le funzioni  $S$  ed  $E$ , al variare del numero di nodi e del numero di processori in parallelo.

| Nodi per lato | $S(2)$ | $S(4)$ | $S(8)$ | $S(12)$ | $S(16)$ |
|---------------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 2000          | 1.97   | 3.87   | 7.57   | 10.95   | 13.99   |
| 2500          | 1.99   | 3.90   | 7.64   | 10.90   | 13.98   |
| 3000          | 1.97   | 3.83   | 7.60   | 10.96   | 14.04   |
| 3500          | 1.97   | 3.90   | 7.61   | 10.99   | 14.06   |
| 4000          | 1.98   | 3.89   | 7.60   | 10.90   | 13.87   |
| 4500          | 1.99   | 3.89   | 7.64   | 10.95   | 14.08   |
| 5000          | 1.96   | 3.88   | 7.57   | 11.01   | 14.05   |

**Tabella 1:** Speed-up in funzione del numero di Processori e di nodi.



| Nodi per lato | $E(2)$ | $E(4)$ | $E(8)$ | $E(12)$ | $E(16)$ |
|---------------|--------|--------|--------|---------|---------|
| 2000          | 0.98   | 0.96   | 0.94   | 0.91    | 0.87    |
| 2500          | 0.99   | 0.97   | 0.95   | 0.90    | 0.87    |
| 3000          | 0.98   | 0.95   | 0.95   | 0.91    | 0.87    |
| 3500          | 0.98   | 0.97   | 0.95   | 0.91    | 0.87    |
| 4000          | 0.99   | 0.97   | 0.95   | 0.90    | 0.86    |
| 4500          | 0.99   | 0.97   | 0.95   | 0.91    | 0.88    |
| 5000          | 0.98   | 0.97   | 0.94   | 0.91    | 0.87    |

**Tabella 2:** Efficienza in funzione del numero di Processori e di nodi.

Osserviamo che i valori di speed-up (e quindi di efficienza) si mantengono praticamente costanti all'aumentare del numero di nodi. Ciò dimostra che, all'aumentare della "dimensione" del problema, non viene persa potenza computazionale e l'algoritmo "scala" correttamente. Un'eventuale sostanziale perdita sarebbe stata sintomo di una parallelizzazione non ottimale.

Nella Fig. 1 è riportata una statistica relativa ai contributi delle varie fasi dell'esecuzione sul tempo totale. Il tempo sequenziale è irrilevante rispetto al totale. Il tempo d'imbalance è dovuto al fatto che, in corrispondenza del numero di nodi scelto, il carico computazionale risulta sbilanciato su una macchina. Infatti, in Fig. 2, dove viene riportata una rappresentazione grafica del tempo d'esecuzione di ognuno dei 16 processori usati, lo sbilanciamento su tale macchina (indicata con la freccia) risulta chiaro. In Fig. 3, invece, l'imbalance è distribuito in modo uniforme su tutte le macchine; al numero di nodi usato per questo test corrisponde una suddivisione perfettamente equa fra le macchine del calcolo computazionale: ogni processore calcola la soluzione dell'equazione su uno stesso numero di righe della griglia. Nella Fig. 4, riportiamo un dominio eterogeneo con le posizioni della sorgente sismica e dei punti in cui sono stati posti i ricevitori. La Fig. 5 mostra la rilevazione dell'onda sul ricevitore  $R_1$ , che registra prima l'onda innescata dal forzante e poi la riflessione nel passaggio tra i due mezzi dopo la scissione. La registrazione sul ricevitore  $R_2$  (Fig. 6) riporta l'onda che è passata da un dominio all'altro e le riflessioni causate, alternativamente, dalla superficie terrestre e dal dominio I. Infine, in Fig. 7, mostriamo la registrazione dell'onda avvertita in superficie, che risente anch'essa delle riflessioni causate sia dalla superficie stessa che dai due strati diversi di materiale.

Figura 1:  $N=4964$   $N_t = 19393$

Figura 2:  $N=4964$   $N_t = 19393$

Figura 3:  $N=4994$   $N_t = 19420$

Figura 4:  $l = 15000\text{ m}$ ,  $N = 5000$ ,  $\Delta x = 3\text{ m}$ ,  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}\text{ s}$ ,  
 $N_t = 12000$ ,  $v_t^I = 3000\text{ m/s}$ ,  $v_t^I = 1732\text{ m/s}$ ,  $\rho^I = 3000\text{ Kg/m}^3$ ,  $v_t^{II} =$   
 $2000\text{ m/s}$ ,  $v_t^{II} = 1155\text{ m/s}$ ,  $\rho^{II} = 500\text{ Kg/m}^3$ . Durata simulazione parallela:  
4.03 h circa. Durata simulazione seriale stimata: 56.43 h circa.

Figura 5: Rilevazione su  $R_1$

Figura 6: Rilevazione su  $R_2$

Figura 7: Rilevazione su  $R_3$