UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TRE

FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Alcune Estensioni ed Applicazioni della Teoria di Morse

Sintesi della tesi di Laurea in Matematica

di Paolo Comerci

Relatore: Prof. Massimilano Pontecorvo

Sia M sia una varietà liscia, e $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$. Un *punto critico* $p \in M$ per ϕ è un punto tale che il differenziale $d\phi(p) = 0$; $\phi(p)$ si dice un *valore critico* di ϕ. In ogni punto critico l'*Hessiano* $(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j} = H(\phi)$ è una forma quadratica ben definita sullo spazio tangente T_pM; un punto critico si dice *non degenere* se $H(\phi)$ è non singolare . Un punto critico non degenere è isolato. La funzione ϕ si dice una *funzione di Morse* se tutti i punti critici di ϕ sono non degeneri; l'*indice* di ϕ in p, che indichiamo con $\lambda_\phi(p)$, è il numero di autovalori negativi dell'Hessiano $H(\phi)$ in p. L'indice è indipendente dal sistema di coordinate. Da un teorema standard di approssimazione tali funzioni sono dense nella topologia $\mathcal{C}^2$.

Sia

$$M^t = \{m \in M | \phi(m) \leq t\};$$

dal lemma principale della teoria di Morse, abbiamo un risultato locale sul tipo di omotopia di M:

Teorema. *Sia $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione liscia, e sia p un punto critico non degenere di indice λ. Poniamo $f(p) = c$ e supponiamo che $f^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ sia compatto, e che non contenga altri punti critici per f oltre a p per qualche $\epsilon > 0$. Allora, per tutti gli ϵ sufficientemente piccoli, l'insieme $M^{c+\epsilon}$ ha il tipo di omotopia di $M^{c-\epsilon}$ con una λ-cella attaccata.*

Si deduce quindi un risultato globale:

Teorema. *Se ϕ è una funzione di Morse su una varietà M e se ogni M^a è compatto, allora M ha il tipo di omotopia di un CW-complesso con una cella di dimensione λ per ogni punto critico di indice λ.*
In particolare una varietà compatta è un CW-complesso finito.

In questa tesi affrontiamo una generalizzazione della teoria di Morse dovuta a R. Bott, in cui si studia il caso in cui i punti critici non sono isolati ma formano delle sottovarietà critiche.

Se $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ è una funzione $\mathcal{C}^\infty$, allora diamo la seguente

Definizione. *Sia N una sottovarietà liscia connessa di M. Tale varietà si dice una* sottovarietà critica non degenere *per ϕ sse*

(i) *Ogni punto di N è un punto critico per ϕ.*

(ii) $\forall\ p \in N$ *, lo spazio $\{H_p = 0\}$ è lo spazio tangente a N in p .*

Considereremo *"funzioni di Bott"*, i.e., funzioni $\mathcal{C}^\infty$ per le quali ogni sottovarietà critica è non degenere.

Abbiamo ancora un risultato locale sul tipo di omtopia di

$$M^t = \{m \in M | \phi(m) \leq t\},$$

che rimane invariato fino a quando t non oltrepassa un valore critico (operiamo una retrazione lungo il campo di vettori $grad\phi$), e cambia mediante l'attaccamento di una cella di dimensione k quando si oltrepassa un valore critico in cui l'Hessiano ha esattamente k autovalori negativi (nel qual caso diciamo che ϕ ha *indice* k). Deduciamo quindi un risultato globale

Teorema. *Sia ϕ una funzione liscia sulla varietà compatta M. Sia M_* l'insieme su cui ϕ assume il suo minimo assoluto, e $|\phi|$ indichi il più piccolo* *indice dei punti critici di ϕ su $M - M_*$. Allora M si ottiene da M_* per incollamento successivo di celle di dimensione non minore di $|\phi|$. In questo modo*

$$M \;=\; N \cup e_1 \cup ... \cup e_r \;, \qquad dim\, e_i \geq |\phi|.$$

Come applicazione della teoria di Morse si possono dimostrare alcuni risultati riguardanti la topologia delle varietà algebriche. Un risultato classico è la dimostrazione, dovuta ad Andreotti e Frankel, del

Teorema di Lefschetz per sezioni iperpiane. *Sia V una varietà algebrica di dimensione complessa k giacente nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$. Sia P un iperpiano in $\mathbb{C}\mathbf{P}^n$ contenente gli (eventuali) punti singolari di V. Allora l'applicazione di inclusione*

$$V \cap P \longrightarrow V$$

induce un isomorfismo tra i gruppi di omologia in dimensione minore di $k-1$. Inoltre l' isomorfismo indotto

$$H_{k-1}(V \cap P; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{k-1}(V; \mathbb{Z})$$

è suriettivo.

Questo risultato può essere generalizzato al caso di una ipersuperficie liscia di una varietà proiettiva. Sia X una varietà proiettiva complessa di dimensione complessa n, e sia

$$L \longrightarrow X$$

un *fibrato lineare olomorfo positivo* (nel senso che la sua classe di Chern è positiva) ed s una sua sezione olomofa il cui insieme degli zeri, che indichiamo con S, sia una ipersuperficie liscia di X.

Dotiamo il fibrato $L \longrightarrow X$ di una *struttura Hermitiana a curvatura positiva*, cioè tale che la forma

$$\frac{i}{2\pi}\Theta = \frac{i}{2\pi}\bar{\partial}\partial log|s|^2 = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial} log\frac{1}{|s|^2}$$

è una 2-forma positiva (Θ è la *curvatura* del fibrato). Poniamo

$$\phi(x) = log|s|^2.$$

Usiamo ϕ - o una funzione vicina a ϕ nella topologia $\mathcal{C}^2$- come "funzione di Bott".

Adesso, per ogni punto critico di $x \in X$ per ϕ la matrice Hermitiana

$$(\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j})log\frac{1}{|s|^2} = \frac{1}{4}((\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}) + i(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}))log|s|^2$$

è definita negativa, e conseguentemente l'Hessiano di ϕ

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} & \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial y_i} & \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \end{pmatrix} log|s|^2$$

ha almeno n autovalori negativi (ciò sarà anche vero per funzioni ψ sufficientemente vicine a ϕ nella topologia $\mathcal{C}^2$). Allora, dalla teoria di Bott, X si ottiene da S mediante l'incollamento di celle di dimensione almeno n, i.e., abbiamo il

Teorema. *Sia L un fibrato lineare positivo sopra X, sia s una sezione olomorfa non singolare di L e sia S l' insieme degli zeri di s. Allora X si ottiene da S mediante incollamenti successivi di celle di dimensione $\geqslant n$. Simbolicamente,*

$$X = S \cup e_1 \cup ... \cup e_r \qquad con\ dim\, e_k \geqslant dim_{\mathbb{C}} X = n$$

da cui deduciamo il

Teorema di Lefschetz rivisitato. *Sia $j : S \subset X$ l'inclusione di S in X. Allora sotto le condizioni del teorema precedente l'omomorfismo indotto da j sia in omotopia che in omologia è suriettivo in dimensione $< n$ ed è pure iniettivo in dimensione $< n - 1$.*

Quest'ultimo risultato contiene a tutti gli effetti il caso liscio del Teorema di Lefschetz per sezioni iperpiane, infatti basta considerare la restrizione ad X del fibrato iperpiano su $\mathbb{CP}_n$ e prendere S come sezione iperpiana.