Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
30 Settembre 2010

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, G. Gentile, F. Tartarone

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Stabilire per quali valori del parametro α esiste finito il seguente integrale.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{x^\alpha(1+x^3)}\mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.2 (15 punti)
Stabilire se esiste finito

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}\mathrm{d}x.$$

In caso affermativo, calcolare l'integrale.

Esercizio 1.3 (15 punti)
Sia $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Si supponga che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ di $\{x_n\}_{n\geq 1}$, esiste una sotto-sottosuccessione $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\geq 1}$ che converge ad a. Dimostrare che $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge ad a.

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x^n = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

con n dispari e $\alpha \in \mathbb{R}$.
(i) (5 punti) Si dimostri che il punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ è stabile se $\alpha \geq 0$ e attrattivo se $\alpha > 0$.
(ii) (5 punti) Si dimostri che se $\alpha > 0$ tutte le traiettorie tendono al punto $(0, 0)$ per $t \to \infty$.
(iii) (5 punti) Si calcoli esplicitamente la soluzione per $n = 1$ e α arbitrario.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)
(i) (5 punti) Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \quad : \quad \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{e^2} \leq c^2\}.$$

Dimostrare che la misura di A è $\pi \cdot e \cdot d \cdot c^2$.
(ii) (5 punti) Dimostrare che il determinante jacobiano della trasformazione

$$\varphi \colon (x, y, z) \to (u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x + y}{\sqrt{2}}, p = z)$$

è 1.
(iii) (15 punti) Calcolare

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \quad : \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Potrebbe essere utile applicare il cambiamento di variabili del punto (ii) e affettare rispetto alla v.

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Sia K uno spazio metrico, e $f \colon K \to \mathbb{R}$ sia una funzione. Si definisca l'enunciato: f è continua su tutto K.

Sia ora $f \colon K \to \mathbb{R}$ una funzione data. Si supponga che K è compatto; si supponga anche la compattezza del grafico di f, definito da

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \quad : \quad x \in K\} \subset K \times \mathbb{R}.$$

Si dimostri che f è continua.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)

Sia p un numero primo fissato e sia $I \subseteq \mathbb{Z}[X]$ l'insieme dei polinomi il cui termine noto è un multiplo di p. Dimostrare che:

(i) I è un ideale di $\mathbb{Z}[X]$;

(ii) I non è un ideale principale;

(iii) l'anello quoziente $\mathbb{Z}[X]/I$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)

Discutere la compatibilità del seguente sistema lineare al variare dei parametri $h, k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ (2-h)x_1 + (2+h)x_2 - x_3 = 1, \\ (2+3h)x_1 - 2hx_2 - x_3 = k. \end{cases}$$

Determinare esplicitamente le soluzioni (quando è possibile) usando anche (quando è possibile) il teorema di Cramer:

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)

Diagonalizzare la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 2.4 (15 punti)

Ridurre a forma canonica la seguente conica nel piano euclideo reale, esplicitando il cambiamento di riferimento euclideo necessario:

$$2X^2 + 4XY - Y^2 + 6Y - 8 = 0.$$

Esercizio 2.5 (25 punti)
Verificare che le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^{2,2}$, lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali, e calcolare le componenti della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto a tale base. Dati poi i sottospazi

$$\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} | x_1 + 2x_2 = 0 \right\}$$

e

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} | x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si descriva il procedimento di Gram-Schmidt per costruire una base ortogonale in uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare.