Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
30 Gennaio 2009

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)| \mathrm{d}x \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si dimostri che $f(x) = 0$ per ogni x tale che $|x| \geq 1$.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Sia $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue non negative, e si supponga che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Tenendo presente che $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$ per $t \geq 0$, si dimostri che

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 [1 - e^{-f_n(x)}] \mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - \alpha\left(x^3 + xy^2\right), \\ \dot{y} = x - y - \alpha\left(yx^2 + y^3\right), \end{cases}$$

dove α è un parametro reale.
(i) Per $\alpha \geq 0$, dimostrare che l'origine è punto d'equilibrio asintoticamente stabile e studiarne il bacino d'attrazione. Studiare qualitativamente il moto nel piano (x, y).
(ii) Per $\alpha < 0$, dimostrare che esiste un ciclo limite repulsivo e studiare il comportamento asintotico del sistema. Studiare qualitativamente il moto nel piano (x, y).
(iii) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, risolvere esplicitamente le equazioni del moto.
(iv) Dimostrare che il sistema non ammette costanti del moto non banali.
[Può essere conveniente utilizzare coordinate polari.]

Esercizio 1.4 (15 punti)
Detta D la porzione della palla unità di $\mathbb{R}^3$ contenuta nell'ottante

$$\{(x, y, z) \quad : \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0\}$$

si determini per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta finito

$$\int_D \frac{xyz}{(1 - (x^2 + y^2 + z^2))^\alpha} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)
(i) (10 punti) Si definiscano

$$Q = (0, 1)^2 = \{(x, y) \quad : \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)\}$$

e

$$D = \{(u, v) \quad : \quad u < v < \frac{-u}{u + 1}, \quad -1 < u < 0\}.$$

Dimostrare che l'applicazione

$$\Phi\colon (x, y) \to (u, v) = (xy - 1, \frac{x}{y} - 1)$$

è iniettiva e suriettiva da Q a D.
(ii) (2 punti) Si calcoli il determinante jacobiano di Φ.
(iii) (8 punti) Usando il teorema sulla derivata della funzione inversa e il punto precedente, si calcoli il determinante jacobiano di Φ^{-1} nel generico punto $(u, v) \in D$.
(iv) (5 punti) Si dimostri che l'unico $p \geq 1$ per cui l'applicazione

$$f\colon Q \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = \frac{1}{(xy - 1)^p}$$

ha integrale finito in Q, è $p = 1$.

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Il teorema di inversione locale per applicazioni da un aperto di $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$, con particolare attenzione alla formula della derivata della funzione inversa.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia $\alpha := 30 \in \mathbb{Z}$.
(i) Fattorizzare α in elementi irriducibili nell'anello degli interi di Gauss $\mathbb{Z}[i]$.
(ii) Determinare tutti gli ideali primi e massimali dell'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/\langle\alpha\rangle$.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

una matrice assegnata. Verificare che l'insieme

$$V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : XA \text{ e } AX \text{ sono simmetriche } \}$$

è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$. Esplicitare le coppie (Δ_1, Δ_2) tali che esista una matrice $X \in V$ per cui $AX = \Delta_1$, $XA = \Delta_2$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$\begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$.
(i) Trovare i valori di h per cui A ha rango minore di 3.
(ii) Stabilire se, posto $h = 1$, A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2X^2 - Y^2 - 4X + 2Y - 3 = 0.$$

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Determinare l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avente l'autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità 2 e

$$\mathrm{Ker} f = \{(x, y, z) : x - y = y + z = 0\}, \qquad \mathrm{Im} f = \{(x, y, z) : 2x - y - z = 0\}.$$

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si descriva il problema della diagonalizzazione di una matrice quadrata a coefficienti in un campo, dando condizioni necessarie e sufficienti per la diagonalizzabilità di matrici generali, descrivendo il caso delle matrici simmetriche, discutendo il ruolo delle proprietà algebriche del campo base.