Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
20 Gennaio 2011

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)

Sia

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0, \quad x + y + z < 1\}.$$

Calcolare

$$\int_T (x + z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Si trovino i punti d'equilibrio e se ne studi la stabilità.

(ii) Si scriva esplicitamente la soluzione con dato iniziale $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)

Determinare il comportamento delle serie seguenti, precisando quali convergono assolutamente.

(i) (5 punti) $$\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

(ii) (5 punti) $$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\log n}{n}.$$

(iii) (5 punti) $$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{\binom{n}{k}} \quad \text{per } k \text{ intero}, \quad k \geq 0.$$

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si disegni schematicamente il solido ottenuto ruotando attorno all'asse z l'insieme che segue, e se ne calcoli il volume:

$$F = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 0 < z < 1, \quad 0 < x < \sqrt{z}\}.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)
Sia $\{a_n\}_{n\geq 0}$ una successione crescente di numeri positivi. Si dimostri che la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(1+a_0)\cdot(1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)}$$

converge.

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si consideri lo spazio $C = C([0,1])$ con la norma del sup.
(i) (2 punti) Si definisca che cos'è un insieme chiuso di $C([0,1])$.
(ii) (2 punti) Si definisca che cos'è un insieme convesso di $C([0,1])$.
Sia M l'insieme delle $f \in C$ tali che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

(iii) (6 punti) Dimostrare che M è un chiuso convesso di C.
(iv) (6 punti) Dimostrare che, se $f \in M$, allora $||f||_{\sup} > 1$.
(v) (5 punti) Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $f \in M$ con $||f||_{\sup} \leq 1 + \varepsilon$.
(vi) (4 punti) Mettere insieme i punti (iii), (iv) e (v) per dimostrare che M non contiene elementi di norma minima.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia $p \geq 3$ un numero primo e sia $A := \mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$. Mostrare che
(i) A ha caratteristica prima uguale p;
(ii) se $p = 5$, A non è integro;
(iii) se $p \equiv 3 \bmod 4$, A è integro.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia V uno spazio vettoriale e sia f un endomorfismo di V. Sia $W = \{u \in V | f^2(u) = u\}$ (dove $f^2 = f \circ f$). Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di V e calcolare la dimensione e una base di W nel caso in cui $V = \mathbb{R}^3$ e $f(x, y, z) = (2x + y, x - z, z)$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Sia A la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 3-k & -1 & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & 1 & 3-k \end{pmatrix}$$

(i) Determinare gli autovalori della matrice A.
(ii) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ è data la conica C di equazione

$$7X^2 - 10\sqrt{3}XY - 3Y^2 + 12\sqrt{3}X - 12Y - 12 = 0.$$

Ridurre l'equazione di C in forma canonica euclidea reale, indicando l'opportuno cambiamento di riferimento euclideo, e stabilirne il tipo. Scrivere le equazioni degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e delle eventuali rette asintotiche.

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)

Sia A una matrice quadrata.

(i) Dimostrare che se $A^2 = 0$ allora la matrice $I - A$ è invertibile.

(ii) Più in generale, se esiste un intero n tale che $A^n = 0$ allora $I - A$ è invertibile.

(iii) Determinare tutte le matrici quadrate di ordine 2 tali che $A^2 = 0$.

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Definire la segnatura di una forma quadratica ed enunciare il Teorema di Sylvester sul campo dei numeri reali. Data la forma quadratica in $\mathbb{R}^3$

$$Q(X, Y, Z) = X^2 + Z^2 - 2XY - 2XZ + 2YZ,$$

(i) Giustificare perché esiste una base ortonormale in cui la forma quadratica Q ammette matrice simmetrica rappresentativa che è diagonale e scrivere l'equazione di Q in tale base.

(ii) Giustificare perché esiste una base di Sylvester di Q e determinare la forma canonica di Sylvester di Q in tale base. Calcolare inoltre la segnatura di Q.
