Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
13 Giugno 2007

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali; si definisca

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

(i) (5 punti) Dimostrare che se $a_n \to \ell$, allora anche $s_n \to \ell$.
(ii) (10 punti) Dimostrare che se $\{a_n\}$ è monotona crescente, allora anche s_n è monotona crescente.

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
Sia $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

(i) (2 punti) Si verifichi che

$$f(x) = \int_e^{e^x} \frac{1}{\log t} \mathrm{d}t \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

(ii) (3 punti) Si dimostri che f è continua crescente e si dica per quali $x \in \mathbb{R}_+$ si ha $f(x) \geq 0$.
(iii) (5 punti) Si dimostri che, se $x \geq 1$, allora

$$\frac{e^x - e}{x} \leq f(x) \leq e^x - e$$

mentre, se $x \in (0, 1]$,

$$e \log x \leq f(x) \leq (1 + x) \log(x).$$

(iv) (5 punti) Si calcolino i limiti

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} f(x), \qquad \lim_{x \to 0+} x f(x).$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) - e^{x^2} + 1}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$$

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -F\left(x^2 + y^2\right) x - y, \\ \dot{y} = -F\left(x^2 + y^2\right) y + x, \end{cases}$$

dove $F \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 con N zeri distinti $0 < z_1 < \ldots < z_N$.
(i) Dimostrare che il sistema ammette N cicli limite distinti.
(ii) Calcolare i periodi dei moti che si svolgono sui cicli limite.
(iii) Dimostrare che se gli zeri sono semplici i cicli limite sono alternativamente stabili e instabili.
(iv) Se l'origine è un punto d'equilibrio instabile, per quali valori di N il moto è limitato?
Suggerimento. Può essere conveniente passare a coordinate polari.

Esercizio 1.5 (25 punti)
Si studi l'integrabilità e si calcoli l'integrale della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

sul dominio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad (z-1)^2 + x^2 + y^2 \geq 1, \quad (z-2)^2 + x^2 + y^2 \leq 4, \quad z \leq 2\}.$$

Suggerimento. Potrebbe essere utile passare a coordinate polari, e ricordare che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (5 punti) Si enunci il teorema di differenziazione sotto il segno d'integrale. Non è richiesta la dimostrazione.

Come applicazione, si risolva il seguente esercizio.

Sia $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} \mathrm{d}t.$$

(ii) (5 punti) Dimostrare, giustificando tutti i passaggi, che $f \in C^1(0,+\infty)$.

(iii) (5 punti) Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(iv) (5 punti) Esprimere $f'(x)$ in termini di $f(x)$; in altre parole, trovare un'equazione differenziale del primo ordine risolta da f.

(v) (5 punti) Risolvere l'equazione e ricavare un'espressione per f diversa da quella data sopra.

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia G il gruppo moltiplicativo delle unità di $\mathbb{Z}_{15}$. Determinare tutti i sottogruppi di G e mostrare che G è prodotto diretto interno di due suoi sottogruppi.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Siano A e B due matrici $n \times n$. Si dimostri che $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ (con tr si denota la traccia, cioé la somma degli elementi diagonali di una matrice).

Esercizio 2.3 (15 punti)
Sia V lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ a valori reali. Si dimostri che l'applicazione

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

definisce su V un prodotto scalare. Sia W il sottospazio definito dalle funzioni $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$; si trovi una base ortonormale per W.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio affine di dimensione 4. Siano l e m due rette sghembe; si dimostri che se si proiettano l e m da un punto generale su un fissato sottospazio di dimensione 3, le proiezioni delle rette restano sghembe in $\mathbb{R}^3$ (la proiezione di una retta da un punto su un R^3 è l'intersezione con $\mathbb{R}^3$ del piano generato dalla retta e dal punto).

Esercizio 2.5 (25 punti)
Sia V uno spazio vettoriale e sia $P : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $P \cdot P = \mathrm{Id}$. Siano U l'immagine di P e W il nucleo di P. Dimostrare che V è somma diretta di U e W (per dimostrare che V è somma di U e W si suggerisce di scrivere ogni elemento $v \in V$ nella forma $v - P(v) + P(v)$). Fornire un esempio di tale P se V é uno spazio vettoriale di dimensione 2.

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.

Si descriva il procedimento di Gram-Schmidt per costruire una base ortogonale in uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare.