Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
12 Giugno 2008

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>ESERCIZIO 1.1</u> (15 punti)

Utilizzando le proprietà della serie geometrica, dimostrare che

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n}.$$

<u>ESERCIZIO 1.2</u> (15 punti)

Derivando termine a termine, si dimostri che la funzione

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

risolve l'equazione differenziale

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0.$$

<u>ESERCIZIO 1.3</u> (15 punti)

Un individuo si trova al centro di una piattaforma circolare di raggio R, che ruota intorno al suo centro con velocità angolare $\omega(t)$.

(i) L'individuo vuole raggiungere il bordo della piattaforma procedendo in linea retta a velocità costante v. Calcolare la forza che deve esercitare per opporsi alle forze apparenti che altrimenti lo farebbero deviare dalla direzione radiale.

(ii) Si supponga che una volta arrivato a metà strada la piattaforma si blocchi e che invece l'individuo continui a esercitare la stessa forza che ha in quell'istante. Si trovi sotto quali condizioni su $\omega(t)$ l'individuo raggiunge il bordo della piattaforma senza deviare dalla direzione radiale.

<u>ESERCIZIO 1.4</u> (15 punti)

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{4 + x^3}{x^2 - 1} \mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)
Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_A xy(x^4 - y^4)\log(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

Potrebbe essere utile il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2. \end{cases}$$

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0\}.$$

(i) (2 punti) Si dimostri che i punti $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(0, 0)$ stanno in A.
(ii) (5 punti) Enunciare il teorema della funzione implicita in $\mathbb{R}^2$.
(iii) (8 punti) Dimostrare che, in un intorno del punto $(0, 1)$, A è il grafico di una funzione $y(x)$; calcolare $y'(0)$. Stessa domanda per il punto $(0, -1)$.
(iv) (3 punti) Determinare se valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto $(0, 0)$.
(v) (7 punti) Usando i moltiplicatori di Lagrange, trovare il massimo e minimo della funzione $f(x, y) = y$ su A.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)
Siano α, $\beta \in \mathbf{S}_n$ due permutazioni su n elementi. Mostrare che
(i) α e β sono coniugate nel gruppo $\mathbf{S}_n$ se e soltanto se hanno la stessa struttura ciclica, ovvero si scrivono come prodotto di cicli disgiunti di uguale lunghezza.
(ii) Dopo avere identificato il gruppo diedrale $\mathbf{D}_4$ delle isometrie del quadrato con un sottogruppo di $\mathbf{S}_4$, determinare due elementi di $\mathbf{D}_4$ che sono coniugati in $\mathbf{S}_4$ ma non in $\mathbf{D}_4$.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)
Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$V = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) | a_{11} = a_{22}, a_{21} = 0\}.$$

(i) Si dimostri che V è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.
(ii) Si esibisca un sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$.
(iii) Si decomponga la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

come somma di una matrice $A_1 \in V$ e di una matrice $A_2 \in U$.

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)
Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Trovare il valore $h \in \mathbb{R}$ per cui la matrice ammette l'autovalore 3.
(ii) Posto $h = -2$, dimostrare che A è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonalizzabile D e il cambiamento di base che la realizzi.

<u>ESERCIZIO 2.4</u> (15 punti)

Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 4X - 2Y + 2 = 0.$$

<u>ESERCIZIO 2.5</u> (25 punti)

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 \\ t & -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Posto $t = 0$, esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $(k+3, k, 1, 2k) \in \operatorname{Ker} f$?

(iii) Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ contenente una base di $\operatorname{Ker} f$.

(iv) Determinare le controimmagini del vettore $(1, 0, -1)$.

<u>ESERCIZIO 2.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

La risoluzione dei sistemi lineari: si enunci il Teorema di Rouché-Capelli, si descrivano il metodo di Gauss e il metodo di Cramer e si applichi la teoria per classificare le possibili intersezioni tra due piani nello spazio affine tridimensionale.
