Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laurea Magistrale 10 Giugno 2009

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)
Data la serie
$$\sum_{n\geq 0} t^2 e^{-nt},$$
(i) (7 punti) si dimostri che converge uniformemente in $[0,+\infty)$ con somma
$$\frac{t^2}{1-e^{-t}}.$$
(ii) (8 punti) Dimostrare che
$$\int_0^\infty \frac{t^2}{e^t-1} = 2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^3}.$$
Suggerimento. Potrebbe essere utile riportarsi al punto (i).

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)
Dato il sistema gradiente planare
$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad V(x,y) = -\left(y^2-(1+x)^2\right)\left(y^2-(1-x)^2\right),$$
(i) (4 punti) determinare i punti d'equilibrio e studiarne la stabilità.
(iii) (11 punti) Si studi qualitativamente il sistema.

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)
Calcolare
$$\int\int_A |xy|(x^4-y^4)\log(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
dove
$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad 1\leq x^2+y^2\leq 2, \quad 1\leq x^2-y^2\leq 2\}.$$
Suggerimento. Potrebbe essere utile la sostituzione $u = x^2+y^2$, $v = x^2-y^2$.

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)
Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n\geq 1}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right]$$

Esercizio 1.5 (25 punti)
Si consideri l'insieme di $\mathbb{R}^n$

$$T_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x_i \geq 0 \forall i, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1\}.$$

(i) (10 punti) Affettando l'insieme con $x_n = cost$, si ricavi una formula che da la misura di T_n in funzione di quella di T_{n-1}.
(ii) (7 punti) Usando il punto (i), si dimostri che

$$|T_n| = \frac{1}{n!}.$$

(iii) (8 punti) Siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ e si definisca

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \quad : \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq 1\}.$$

Dimostrare che

$$|E| = \frac{1}{n!} \det(a_1, \ldots, a_n)$$

dove $(a_1, \ldots, a_n)$ è la matrice i cui vettori colonna sono a_1, a_2,..., fino ad a_n.
Suggerimento. Potrebbe essere utile riportarsi al punto (ii) con un opportuno cambiamento di variabili.

Esercizio 1.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si consideri l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^4 + y^4 + x^2 - y^2 = 0\}$.
(i) (2 punti) Dimostrare che A contiene i punti $(0, 1)$, $(0, -1)$ e $(0, 0)$.
(ii) (5 punti) Enunciare il teorema della funzione implicita per funzioni di due variabili.
(iii) (5 punti) Dimostrare che, in un intorno del punto $(0, 1)$, A è il grafico di una funzione $y(x)$ di classe C^1; calcolare $y'(0)$. Stessa domanda per un intorno del punto $(0, -1)$.
(iv) (5 punti) Determinare se valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita nel punto $(0, 0)$.
(v) (5 punti) Enunciare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange per funzioni di due variabili.
(vi) (3 punti) Usando i moltiplicatori di Lagrange, si trovino il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = y$ su A.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)
Siano d un intero privo di fattori quadratici e $\alpha := a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Mostrare che l'omomorfismo di anelli

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{d}]}{\langle \alpha \rangle}; \quad x \mapsto x + \langle \alpha \rangle$$

è suriettivo se e soltanto se $MCD(a, b) = 1$.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)
In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, -2)$. Verificare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti e stabilire se esiste un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ tale che

- $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$,
- $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$,
- $f(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$,
- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 2, 1, 1)$,
- $f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (2, 6, 0, 1)$.

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$X^2 - 2XY - Y^2 + 2Y + 1 = 0.$$

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)
Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ A è diagonalizzabile e per tali valori diagonalizzare A.

Esercizio 2.5 (25 punti)
Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica, è associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & h \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Trovato il valore di h per cui f non è suriettiva,
(i) determinare l'Immagine $\operatorname{Im} f$ di f,
(ii) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k^2 - k, k) \in \operatorname{Im} f$,
(iii) determinare il Nucleo $\operatorname{Ker} f$ di f,
(iv) verificare che $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\mathbf{0}\}$,
(v) esistono dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tali che $f(\mathbf{v}) = (3, 2, -2)$?

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si enunci il Teorema di Rouché-Capelli e si utilizzi il caso particolare dei sistemi lineari in tre variabili per discutere le possibili mutue posizioni di un piano e di una retta nello spazio affine.