Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
07 Giugno 2010

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)

Determinare l'area della regione di piano D compresa tra la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

e la curva di equazione

$$\rho^2 = 2\cos\theta, \qquad \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Dimostrare preliminarmente che la curva è esterna alla circonferenza.

Esercizio 1.2 (15 punti)

Calcolare

$$\int_1^2 \frac{e^t(e^t - 1)}{e^{2t} - 1} \mathrm{d}t.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)

Calcolare i due limiti seguenti:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}{x^2 + 6x + 9},$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{-8}}{\log(1 + e^{4x})}.$$

Esercizio 1.4 (15 punti)

Si consideri il sistema dinamico planare descritto, in coordinate polari, dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho^2 (1 - \rho), \\ \dot{\theta} = \rho^2. \end{cases}$$

Dimostrare che esiste un ciclo limite globalmente attrattivo.

<u>ESERCIZIO 1.5</u> (25 punti)
Si calcoli

$$\int\int_T xy\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x < y < 2x, \quad \frac{2\pi}{x} \leq y \leq \frac{3\pi}{x}, \quad x > 0\}.$$

Potrebbe essere utile il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 1.6</u> (25 punti)
Dissertazione teorica.
Enunciare un teorema di passaggio al limite sotto segno d'integrale nella teoria di Riemann.

Ricordando che, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}x^{2n} + \ldots$$

dimostrare che, per $|x| < 1$,

$$\arcsin(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>ESERCIZIO 2.1</u> (15 punti)
Sia $\mathbb{F}_3 := \{0, 1, 2\}$ il campo con 3 elementi e sia

$$f(X) := X^4 + 2X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3[X].$$

(i) Costruire un campo di spezzamento K di $f(X)$.
(ii) Calcolare $[K : \mathbb{F}_3] := \dim_{\mathbb{F}_3}(K)$ e determinare una base di K su $\mathbb{F}_3$.
(iii) Determinare quanti sono i polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_3$ che si spezzano linearmente su K.

<u>ESERCIZIO 2.2</u> (15 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali, si consideri l'operatore

$$f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$$

così definito:

$$f(X) := AX - XA,$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che f è un operatore lineare.
(ii) Determinare il nucleo di f.
(iii) Verificare che

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

non è nel nucleo di f.
(iv) Determinare se

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è nell' immagine di f.

<u>ESERCIZIO 2.3</u> (15 punti) Dimostrare che esiste un unico endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 1), (2, 1, 2)$ siano autovettori di f con autovalori rispettivamente $1, 2, 3$. Dimostrare che f è un isomorfismo e calcolare gli autovettori di f^{-1}.

Esercizio 2.4 (15 punti)

Siano date le seguenti matrici a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che A e B hanno autovalori reali.

(ii) A e B sono diagonalizzabili?

(iii) Verificare che $A+B$ non ha autovalori reali.

(iv) Esibire una matrice $C \neq B$ con autovalori reali tale che $A+C$ non abbia autovalori reali.

Esercizio 2.5 (25 punti)

Studiare la famiglia di coniche descritte dall' equazione

$$X^2 + 2XY + tY^2 + 4X - 6Y + t = 0,$$

riconoscendo le coniche degeneri, le parabole, le iperboli, le ellissi (reali o immaginarie). Scrivere le equazioni canoniche per la conica corrispondente a $t = 1$.

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Enunciare il Teorema di riduzione a forma canonica di una conica nel piano euclideo e discutere i principali passi della sua dimostrazione: che cosa sono le forme canoniche; quali sono; come varia la risposta a seconda che il campo sia quello dei numeri reali o dei numeri complessi; perché è possibile la riduzione.