Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
06 Giugno 2011

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}.$$

Si dimostri che la funzione

$$u(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$$

è integrabile in $(0,1)$.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Sia $a < b \in \mathbb{R}$. Determinare se l'integrale seguente esiste finito:

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Sia $a_n > 0$, e si supponga che $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge. Dimostrare che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$$

diverge.

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1-y, \\ \dot{y} = xy, \end{cases}$$

(i) Si mostri che

$$H(x,y) = \frac{x^2}{2} + y - \log y$$

è una costante del moto per il sistema.
(ii) Si dimostri che il piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ è invariante.
(iii) Si determinino i punti d'equilibrio in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ e se ne studi la stabilità.
(iv) Si studi qualitativamente il moto in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)

(i) (13 punti) Sia $a_n > 0$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, e si supponga che $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge. Dimostrare che

$$\frac{a_{N+1}}{s_{N+1}} + \ldots + \frac{a_{N+k}}{s_{N+k}} \geq 1 - \frac{s_N}{s_{N+k}}, \qquad N \geq 1,$$

e dedurre che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{s_n}$$

diverge.

(ii) (12 punti) Con la stessa notazione del punto precedente, dimostrare che

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}, \qquad n \geq 2,$$

e dedurne che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{s_n^2}$$

converge.

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

(i) (10 punti) Si dimostri la formula seguente (di Abel):

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p, \qquad q \geq p \geq 0,$$

dove

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad n \geq 0,$$

e $A_{-1} = 0$.

(ii) (15 punti) Usando il risultato del punto precedente, dimostrare che, se $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, e se la successione $\{b_n\}$ è monotona (crescente o decrescente) e limitata, allora $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)
Sia $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5}\,;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli

$$\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Z}_2\,; \quad a + bi\sqrt{5} \mapsto \overline{a+b}.$$

(i) Verificare che $\mathrm{Ker}(\varphi) = P := \langle 2, 1 + i\sqrt{5}\rangle$.
(ii) Provare che P è un ideale primo e $P^2 = 2A$.
(iii) Provare che P non è un ideale principale.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)
Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Dimostrare o dare un controesempio per ciascuno dei seguenti enunciati:
(i) se A è diagonalizzabile allora è invertibile;
(ii) se A è invertibile allora è diagonalizzabile .

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)
Dati i vettori

$$v_1 = (0, 1, 2), \quad v_2 = (3, -1, 1), \quad v_3 = (-1, 2, 2)$$

di $\mathbb{R}^3$, determinare la proiezione ortogonale di v_3 sul piano generato da v_1 e v_2.

<u>Esercizio 2.4</u> (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$Y^2 - XY + 1 = 0.$$

ESERCIZIO 2.5 (25 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{3,3}$ si considerino il sottospazio V delle matrici simmetriche e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che l'insieme

$$W = \{X \in V : AX \text{ è simmetrica } \}$$

è un sottospazio e determinarne una base. Verificare che gli elementi di W commutano con A.

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Si definiscano gli autovalori e gli autospazi di un endomorfismo lineare. Si diano condizioni sufficienti a garantire la diagonalizzabilità di un endomorfismo; si diano esempi di endomorfismi non diagonalizzabili e si enunci il Teorema spettrale. In particolare si dimostri che:
(i) gli autovalori di una matrice simmetrica 2×2 a coefficienti reali sono reali,
(ii) gli autovalori di una matrice simmetrica 2×2 a coefficienti reali sono uguali se e solo se la matrice è un multiplo della matrice identità.