Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
3 Ottobre 2008

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Dimostrare che esiste uno e un solo $a \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^3 - ax^2 + x - a} \mathrm{d}x$$

converge. Per questo $a \in \mathbb{R}$, calcolare l'integrale.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Calcolare i due limiti seguenti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(\mathrm{e}^{t^2} - 1 \right) \mathrm{d}t,$$

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.3 (15 punti)
Si consideri il sistema di equazioni differenziali non lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - y^2 x - 2y^3, \\ \dot{y} = x - y + x^3 + 2y^2 x. \end{cases}$$

(i) (2 punti) Si dimostri che l'origine è un punto d'equilibrio asintoticamente stabile.
(ii) (3 punti) Sia $\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$: si dimostri che $\rho(t)$ tende a zero in modo monotono.
(iii) (10 punti) Si studi qualitativamente il moto nel piano (x, y). [Può essere conveniente utilizzare coordinate polari.]

Esercizio 1.4 (15 punti)

Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \left[\sqrt{(x^2+2x+2)} - (x+1)\right] \mathrm{d}x.$$

Esercizio 1.5 (25 punti)

Siano f e g due funzioni definite su $\mathbb{R}$, positive e tali che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1.$$

Esercizio 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si enunci e brevemente si dimostri il teorema di differenziazione per serie, con particolare riguardo alle serie di potenze. Riconducendosi a un'opportuna serie di potenze, calcolare

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot n.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>Esercizio 2.1</u> (15 punti)

Sia $\alpha := \sqrt{5+\sqrt{5}} \in \mathbb{C}$ e $m(X) \in \mathbb{Q}[X]$ il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

(i) Determinare $m(X)$.

(ii) Calcolare il grado $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] := \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha)$ e determinare una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.

(iii) Mostrare che $m(X)$ si spezza linearmente su $\mathbb{Q}(\alpha)$.

<u>Esercizio 2.2</u> (15 punti)

Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali, sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

e sia

$$V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}.$$

(i) Si dimostri che V é un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.

(ii) Si calcoli la dimensione di V.

<u>Esercizio 2.3</u> (15 punti)

Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} h-1 & h & 1-2h & h-1 \\ h & 1 & -h-1 & h \\ h & 1 & -h-1 & h \\ 1 & 1-h & h-2 & 1 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

(i) Determinare i valori di h per cui risulta $\mathrm{Ker}\phi = \mathrm{Im}\phi$.

(ii) Posto $h = 0$, determinare gli autospazi di ϕ.

Esercizio 2.4 (15 punti)

Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 + 2XY + X - Y = 0.$$

Esercizio 2.5 (25 punti)

Sia V lo spazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ e sia W l'insieme degli endomorfismi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $f((1,0,1)) = (0,1,0)$ e $f((1,1,0)) = (1,0,1)$.

(i) Si dimostri che W non é un sottospazio di V.

(ii) Si determini una matrice che rappresenti il generico elemento di W.

(iii) Si caratterizzino gli elementi di W che sono isomorfismi.

(iv) Si determinino gli elementi $g \in W$ tali che $(1,1,1) \in \mathrm{Ker} g$.

Esercizio 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

La risoluzione dei sistemi lineari: si enunci il Teorema di Rouché-Capelli, si descrivano il metodo di Gauss e il metodo di Cramer e si applichi la teoria per classificare le possibili intersezioni tra due piani nello spazio affine tridimensionale.