Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
01 Ottobre 2009

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)

Calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} (\log x)^\alpha \log(\log x)$$

per gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste.

Esercizio 1.2 (15 punti)

Sia $M_n(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali, e sia $B \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice di elementi

$$B_{ij} = 1, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Sia $A = \lambda B$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) Dimostrare per induzione che $A^k = \lambda^k n^{k-1} B$ per $k \geq 1$;

(ii) calcolare $\exp A$ partendo dalla definizione $\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$;

(iii) trovare la soluzione $x(t)$ del sistema di equazioni differenziali $\dot{x} = Ax$ in $\mathbb{R}^n$, in funzione del tempo t e del dato inziale $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$;

(iv) discutere l'esistenza di eventuali sistemi invarianti non banali per il sistema.

Esercizio 1.3 (15 punti)

Dimostrare che, se

$$\sum_{n\geq 1} a_n^2 < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} b_n^2 < \infty,$$

allora $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ converge assolutamente.

Esercizio 1.4 (15 punti)

Stabilire per quali p e q reali i seguenti integrali generalizzati convergono

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\log(1+x) - \log(x))^q}{x^p} \mathrm{d}x,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{[\log(1+x)]^q (\log x)^p}{x^{p+q}} \mathrm{d}x.$$

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)

Sia $u_1\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva che soddisfa l'equazione differenziale

$$u''(x) + p(x)u(x) = 0 \qquad 0 \le x \le +\infty. \tag{A}$$

Si supponga inoltre che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u_1^2(t)} < \infty. \tag{B}$$

(i) Dimostrare che anche la funzione

$$u_2(x) = u_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u_1^2(t)}$$

soddisfa (A).

(ii) Usando il punto (i), dimostrare che, se (A) ha una soluzione positiva su $[0,+\infty)$ per cui vale (B), allora (A) ha due soluzioni y_1 e y_2 positive su $[0,+\infty)$ e tali che

(1) $$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 1 \qquad x > 0$$

(2) $$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]' < 0 \qquad x > 0$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 0.$$

ESERCIZIO 1.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si enunci il teorema della funzione implicita per funzioni di più variabili, con particolare attenzione alla formula che dà la derivata della funzione implicita.

Si dimostri che esistono due mappe $U\colon (x,y) \to (u,v)$ di classe C^1 che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} xyu - 4yu + 9xv = 0, \\ 2xy - 3y^2 + v^2 = 0, \end{cases}$$

in un intorno del punto $(x_0,y_0) = (1,1)$. Si scelga una di queste due mappe e se ne calcoli la derivata in $(1,1)$.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>ESERCIZIO 2.1</u> (15 punti)
Si considerino $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ come *gruppi additivi*. Si dimostri che:
(i) ogni sottogruppo finitamente generato di $\mathbb{Q}$ è ciclico;
(ii) ogni elemento del gruppo quoziente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha ordine finito;
(iii) per ogni intero $n \geq 0$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ha un unico sottogruppo di ordine n e tale sottogruppo è ciclico.

<u>ESERCIZIO 2.2</u> (15 punti)
Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che, rispetto alla base canonica è associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2 - h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.
(i) Determinare il valore di h per cui il nucleo $\mathrm{Ker}(f)$ ha dimensione 2;
(ii) determinare una base di $\mathrm{Ker}(f)$ per tale valore di h;
(iii) posto $h = 1$ determinare autovalori e autovettori di f;
(iv) determinare se per $h = 1$ f è diagonalizzabile.

<u>ESERCIZIO 2.3</u> (15 punti)
Data la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

determinare per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ la matrice A ammette l'autovalore $\lambda = 1$. Posto $a = 0$, esistono tre autovettori linearmente indipendenti di A?

<u>ESERCIZIO 2.4</u> (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$3X^2 - 2XY + 3Y^2 + 2X + 2Y = 0.$$

<u>ESERCIZIO 2.5</u> (25 punti)

In $M_2(\mathbb{R})$, lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine due a coefficienti reali, sia

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che i sottoinsiemi

$$V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\} \qquad \text{e} \qquad W = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX + XA = 0\}$$

sono sottospazi vettoriali di $M_2(\mathbb{R})$;

(ii) determinare una base per ciascuno di essi;

(iii) determinare una base per i sottospazi $V \cap W$ e $V + W$;

(iv) data la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & h-2 \\ 0 & h-3 \end{pmatrix},$$

determinare $h \in \mathbb{R}$ tale che C appartenga a $V + W$;

(v) data la matrice per tale valore di h trovare $E \in V$ e $F \in W$ tale che $C = E + F$.

<u>ESERCIZIO 2.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si descriva il procedimento di Gram-Schmidt per dotare ogni spazio vettoriale di dimensione finita di una base ortogonale. Si enunci poi il Teorema di Sylvester sulle forme bilineari simmetriche in uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo dei numeri reali.
