Prova Finale di Tipo B e
Prova di Accesso alla Laurea Magistrale
1 Febbraio 2007

Dipartimento di Matematica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, G. Gentile

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti.
(b) Il punteggio massimo è di 100 punti.
(c) Non possono essere svolti più di 5 esercizi da 15 punti, per il resto la scelta degli esercizi da svolgere è libera.
(d) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(e) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
(i) Per $a \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(\log(x^2+a) - 2\log x).$$

(ii) Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{\log(1+x)}\right).$$

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3(t)}.$$

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Si studino l'insieme di definizione e la continuità della funzione

$$f(x,y) = \int_0^1 \frac{1-e^{-xyt^2}}{t}\mathrm{d}t.$$

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)
Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)\,(2xy+2y-1)\,, \\ \dot{y} = -\,(y-1)\,(2xy+2x-1)\,, \end{cases}$$

nel dominio

$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad : \quad x+1>0, \quad xy+x+y\geq 0\Big\}.$$

(i) Verificare che la funzione

$$H(x,y) = (x-1)\,(y-1)\,(xy+x+y)$$

è un costante del moto.
(ii) Determinare i punti d'equilibrio e discuterne la stabilità.
(iii) Studiare qualitativamente la dinamica.
(iv) Discutere brevemente come cambia lo scenario se il sistema si immagina definito su tutto $\mathbb{R}^2$.

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)
(i) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \int_0^x (e^4 - e^{t^2})\mathrm{d}t$$

con particolare attenzione al dominio di definizione, alle simmetrie, ai limiti, alla monotonia e alla convessità.
(ii) Per la funzione f definita al punto (i), discutere esistenza e numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x) = \lambda x$$

al variare del numero reale λ.

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti)
Dissertazione teorica.
Enunciare il teorema di cambiamento di variabili negli integrali multipli e calcolare l'integrale

$$\int_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4x, \quad |y| \le \sqrt{3}x\}.$$

GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Sia $\mathbb{Q}[X]$ l'anello dei polinomi a coefficienti razionali nell'indeterminata X e siano

$$f(X) := X^7 - X^5 - X^4 + X^2\,; \quad g(X) := X^5 - X \in \mathbb{Q}[X].$$

Determinare il generatore monico dell'ideale $I := (f(X), g(X)) \subseteq \mathbb{Q}[X]$ e stabilire se l'anello quoziente $\mathbb{Q}[X]/I$ è un campo.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Sia P_3 lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o eguale a 3. Si scriva $22 + 11x - 6x^2 + x^3$ come combinazione lineare dei polinomi 1, $(x-2)$, $(x-2)^2$ e $(x-2)^3$.
Si dimostri che $\{1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\}$ è una base di P_3.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio euclideo. Dimostrare che se due piani π_1 e π_2 si intersecano lungo una retta l, per ogni retta $r_1 \subset \pi_1$ non parallela a l esiste sempre almeno una retta $r_2 \subset \pi_2$ tale che r_1 e r_2 siano complanari e perpendicolari.

Esercizio 2.4 (15 punti)
Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione

$$X^2 + Y^2 - 4XY - 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - 4 = 0.$$

Esercizio 2.5 (25 punti)
Una matrice $A = (a_{ij})$ si dice triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per gli i, j tali che $i > j$ e si dice strettamente triangolare superiore se $a_{ij} = 0$ per gli i, j tali che $i \geq j$. Sia TS_n lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine n che sono triangolari superiori e sia STS_n lo spazio delle matrici reali quadrate di ordine n che sono strettamente triangolari superiori.
Si dimostri che se $A, B \in TS_n$ anche $AB \in TS_n$. È vero che TS_n è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne?

Si dimostri che se $A \in STS_n$ allora A soddisfa l'equazione $A^n = 0$; si dimostri che se A è di ordine 2 e $A^2 = 0$ allora $A \in STS_2$.

<u>Esercizio 2.6</u> (25 punti)

Dissertazione teorica.

Si enunci il teorema di Rouché-Capelli e lo si usi per descrivere le possibili mutue posizioni di una retta e un piano nello spazio affine $\mathbb{R}^3$.
