PFB - Tutorato 1

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

17 gennaio 2008

ANALISI

Esercizio 1 ([1, n. 6.14 pag. 201]). *Riconoscere che le serie seguenti sono telescopiche e trovarne la somma:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}}$
9. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$
10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{k+1}{k}$

Esercizio 2 ([1, n. 6.19 pag. 217]). *Dimostrare che se la serie $\sum a_k$ converge assolutamente, allora converge assolutamente anche la serie $\sum \frac{k+1}{k} a_k$.*

Esercizio 3 (PFB 02/02/04, n. 1.1). *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)^{2^n}.$$

Esercizio 4 (PFB 03/10/06, n. 1.1). *Calcolare i limiti seguenti.*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}} \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right).$$

Esercizio 5 (PFB 03/10/06, n. 1.2). *Sia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = c.$$

Si dimostri che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = c.$$

Esercizio 6 (PFB 03/10/06, n. 1.5). *Si studi l'integrabilità e si calcoli l'integrale della funzione*

$$f(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) : y^4 < 4x, x < 4y^4\}.$$

GEOMETRIA

Esercizio 7 ([2, n. 10 pag. 190]). *Calcolare gli autovalori e la loro molteplicità algebrica e geometrica per ognuna delle seguenti matrici di $M_3(\mathbb{R})$, e dedurre se sono o no diagonalizzabili.*

$$a)\begin{pmatrix}-6&2&-5\\-4&4&2\\10&-3&8\end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix}-8&-13&-14\\-6&-5&-8\\14&17&21\end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&-15\\0&2&8\end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix}-5&4&-1\\-4&1&-2\\8&-4&3\end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix}13&59&34\\10&40&24\\-18&-79&-46\end{pmatrix} \qquad f)\begin{pmatrix}-4&2&5\\0&-44&-120\\0&16&44\end{pmatrix}.$$

Esercizio 8 ([2, n. 7 pag. 242]). *In ciascuno dei casi seguenti determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori assegnati:*

a) $(2,0,0,1), (1,2,2,3), \left(10,-1,-\frac{1}{2},0\right), (5,2,2,5)$

b) $(-1,0,1,1), (2,1,4), (0,1,3,6)$

c) $(1,1,-1,1), (-2,-2,2,-2), (2,1,1,2), (3,1,1,1)$

d) $(1,1,0,-1), (-2,1,\sqrt{3},5), (4,4,\sqrt{3},2), (-6,-3,0,3)$.

Esercizio 9 ([2, n. 1 pag. 291]). *In ciascuno dei casi seguenti determinare una matrice $M\in\mathrm{SO}(2)$ che diagonalizzi la matrice simmetrica assegnata:*

$$a)\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix}5&-13\\-13&5\end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix}7&-2\\-2&\frac{5}{3}\end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}.$$

Esercizio 10 (PFB 01/10/02, n. 1). *Determinare polinomio caratteristico, autovalori e basi degli autospazi della matrice reale seguente:*

$$\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Stabilire inoltre se la matrice è diagonalizzabile.

Riferimenti bibliografici

[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1*. Bollati Boringhieri, 2002.

[2] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.

PFB - Tutorato 1

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

17 gennaio 2008

ANALISI

Es. 1 1.

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{A}{2k+1} + \frac{B}{2k+3} = \frac{A(2k+3)+B(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k(A+B)+(3A+B)}{(2k+1)(2k+3)} \tag{1}$$

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 3A+B &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1/2 \\ B &= -1/2 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \left.\frac{1/2}{2k+1}\right|_{k=0} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

2.

$$\frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{A}{(3k+1)} + \frac{B}{(3k+4)} = \frac{A(3k+4)+B(3k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{3k(A+B)+(4A+B)}{(3k+1)(3k+4)} \tag{3}$$

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 4A+B &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1/3 \\ B &= -1/3 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \left.\frac{1/3}{3k+1}\right|_{k=0} = \frac{1}{3}. \tag{4}$$

3.

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \left.\frac{1}{k^2}\right|_{k=1} = 1. \tag{5}$$

4.

$$\frac{k}{(4k-1)^2} = \frac{k}{16(k+1/2)^2(k-1/2)^2} = \frac{1/32}{(k-1/2)^2} - \frac{1/32}{(k+1/2)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2-1)^2} = \left.\frac{1/32}{(k-1/2)}\right|_{k=1} = \frac{1}{64}. \tag{6}$$

8.

$$\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \left.\frac{1}{\sqrt{k}}\right|_{k=1} = 1. \tag{7}$$

10. Notiamo che $\log \frac{k+1}{k} = \log k + 1 - \log k$, ma $\log k \not\to 0$. La serie è divergente, infatti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{8}$$

Es. 2

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{k+1}{k} a_k\right| \le 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty. \tag{9}$$

Es. 3

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 1-(1/2)^n \to 1 \tag{10}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \tag{11}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)^{2^n} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)^{2^n} = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} \to e^{-1} \tag{12}$$

Es. 4

$$\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}} = \left[\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^2+3}{n-2}}\right]^{\frac{n^3-1}{n^2+1}\frac{n-2}{n^2+3}} \to e^{-1} \tag{13}$$

$$n\left(1-\sqrt{1-\sin\frac{1}{n}}\right) = n\left(1-\sqrt{1-\sin\frac{1}{n}}\right)\frac{1+\sqrt{1-\sin\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\sin\frac{1}{n}}} = \frac{n\sin\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1-\sin\frac{1}{n}}} \to \frac{1}{2} \tag{14}$$

Es. 5 Definizione di limite:

$$\forall \epsilon > 0 \exists M \gg 0 : \forall x \geq M \; c-\epsilon < f(x) < c+\epsilon \tag{15}$$

Linearità dei limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^M f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_M^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{16}$$

Continuità di f, Teorema di Weierstrass:

$$\exists \underline{x}, \overline{x} \in [0,M] : f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}) \forall x \in [0,M] \tag{17}$$

$$0 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}f(\underline{x})M = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^M f(\underline{x})\,\mathrm{d}t \leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^M f(t)\,\mathrm{d}t \leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^M f(\overline{x})\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}f(\overline{x})M = 0 \tag{18}$$

Integrando la disuguaglianza in (15) tra M e x e moltiplicando per $\frac{1}{x}$:

$$c-\epsilon = \lim_{x\to\infty}\frac{x-M}{x}(c-\epsilon) \leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_M^x (c-\epsilon)\,\mathrm{d}t \leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_M^x f(t)\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

$$\leq \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_M^x (c+\epsilon)\,\mathrm{d}t \leq \lim_{x\to\infty}\frac{x-M}{x}(c+\epsilon) = c+\epsilon \tag{20}$$

Poiché ϵ è arbitrariamente piccolo, abbiamo la tesi.

6. La funzione è integrabile sul dominio perché è continua ovunque salvo nell'orgine, dove ha una singolarità del tipo $\frac{1}{\sqrt{x}}$, che è integrabile.

PFB - Tutorato 2

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

21 gennaio 2008

ANALISI

Esercizio 1 ([1, n. 9.12 pag. 342]). *Calcolare i seguenti integrali e verificare i risultati:*

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x}$
4. $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-3)(x+1)}$
5. $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{(x^2+x)(x-2)}\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{x+3}{x+3x^2}\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$
8. $\displaystyle\int \frac{1-x}{(1+x)(1+3x)}\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-4x}\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{2x^2+x}\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)(x^2-4)}$

Esercizio 2 ([2, n. 15.21 pag. 156]). *Trovare il massimo e il minimo delle funzioni che seguono, nel quadrato* $|x|+|y|\le 2$.

1.$(x-1)^2(y+2)$
2.$x^2+\alpha y^2$
3.$(y+1)e^{xy}$
4.$x^2+3xy+y$

Esercizio 3 (PFB 22/06/05, n. 1.1). *Si consideri la funzione*

$$f(x)=\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

1) Determinare il dominio di f e dire se f è pari o dispari.

2) Calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

3) Dimostrare che f si può estendere con continuità a una funzione $\tilde f$ definita su tutto $\mathbb{R}$.

4) Dimostrare che $\tilde f$ è Lipschitz.

Esercizio 4 (PFB 01/02/07, n. 1.1). *(i) Per $a\in\mathbb{R}$, calcolare*

$$\lim_{x\to\infty} x^2(\log(x^2+a)-2\log x).$$

(ii) Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\log(1+x)}\right).$$

GEOMETRIA

Esercizio 5 (PFB 01/10/02, n. 2). *Discutere il seguente sistema:*

$$\begin{array}{llll} & mY & +(m-2)Z & =-2, \\ mX & +Y & +2Z & =1, \\ mX & & +3Z & =1, \end{array} \qquad m \text{ parametro reale}$$

Esercizio 6 (PFB 20/02/03, n. 2.1). *Calcolare la matrice*

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}^n$$

Quali sono gli autovalori di A? Dire se A è diagonalizzabile motivando la risposta.

Riferimenti bibliografici

[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1*. Bollati Boringhieri, 2002.

[2] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri, 2003.

PFB - Tutorato 2

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

21 gennaio 2008

ANALISI

Es. 2 Poiché il vincolo $|x|+|y|=2$ (che indica il quadrato di vertici $(-2,0),(0,-2),(0,2),(2,0)$) non è di classe $\mathcal{C}^1$, non si possono applicare i moltiplicatori di lagrange nella forma classica: è necessario studiare i punti critici sui quattro lati applicando lo schema classico, cercare eventuali massimi e minimi interni al quadrato e infine calcolare il valore della funzione nei quattro vertici del quadrato. Il massimo sarà il massimo tra i punti nei quattro vertici, i punti sui quattro segmenti e i punti interni. Discorso analogo per il minimo.

Es. 3 1) La funzione f è pari perché è la primitiva di $\frac{\sin t}{t^2}$ che è una funzione pari. In alernativa, effettuare il cambio di variabile $y=-t$. Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$ tranne in 0, dove $\frac{\sin t}{t^2}$ ha una singolarità non integrabile del tipo $\frac{1}{t}$.

2)

$$\left|\lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| \le \lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \le \lim_{x\to\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{t}\bigg|_x^{2x} = \lim_{x\to\infty}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0. \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d} = \lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{t+\mathcal{O}(t^3)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0+}\left[\int_x^{2x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t+\int_x^{2x}\mathcal{O}(t)\right] = \log\frac{2x}{2}+0 = \log 2 \tag{2}$$

3) E' sufficiente porre

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \log 2 & x=0 \\ f(x) & x\neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

4) Basta osservare che la sua derivata è limitata. Fuori dall'origine, la sua derivata è $\frac{\sin t}{t^2}\Big|_x^{2x} = \frac{\sin 2x}{4x^2}-\frac{\sin x}{x^2}$:

$$\left|\frac{\sin 2x}{4x^2}-\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2} = \frac{5}{4x^2} \tag{4}$$

quantità limitata in $\mathbb{R}\backslash[-\delta,\delta]$. La derivata è una funzione dispari, quindi il suo valore in 0 è 0.

Es. 4 Il primo limite è immediato.

$$x^2(\log\frac{x^2+a}{x^2}) = \log(1+\frac{a}{x^2})x^2 \to \log e^a = a \tag{5}$$

Il secondo un po' meno. Ricordiamo che $\log 1+x = x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)$ e $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)$.

$$\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\log(1+x)} = \frac{\log(1+x)-e^x-1}{(e^x-1)\log(1+x)} = \frac{x-\frac{x^2}{2}-1-x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{O}(x^3)}{(x+\mathcal{O}(x^2))+(x+\mathcal{O}(x^2))} = \frac{-x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2+\mathcal{O}(x^3)} \to -1 \tag{6}$$

GEOMETRIA

Es. 6 N.B.: c'è una lieve ambiguità sul testo originale della PFB. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e sia $A_n = A^n$. A è simmetrica, quindi diagonalizzabile. Una volta trovati i suoi autovalori $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ allora detta C la matrice che diagonalizza A (notazione GE1, o Q^{-1} in notazione FM1), ovvero la matrice che ha per colonne i vettori della base diagonalizzante, si ha

$$D = C^{-1}AC = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Per la proprietà associativa

$$D^n = \underbrace{(Q^{-1}AQ)(Q^{-1}AQ)\dots(Q^{-1}AQ)}_{n \text{ volte}} = Q^{-1}A(QQ^{-1})A(QQ^{-1})\dots AQ^{-1} = Q^{-1}A^nQ \tag{8}$$

da cui $A^n = QD^nQ^{-1}$, quindi A^n è diagonalizzabile e ha la stessa base diagonalizzante di A e spettro $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n\}$.

PFB - Tutorato 3

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

24 gennaio 2008

ANALISI

Esercizio 1 ([1, n. 13.10 pag. 86]). *Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{2n-1}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

Esercizio 2 (PFB 01/02/2007, n. 1.5). *(i) Tracciare il grafico della funzione*

$$f(x)=\int_0^x (e^4-e^{t^2})\,\mathrm{d}t$$

con particolare attenzione al dominio di definizione, alle simmetrie, ai limiti, alla monotonia e alla convessità.

(ii) Per la funzione f definita al punto (i), discutere esistenza e numero di soluzioni dell'equazione

$$f(x)=\lambda x$$

al variare del numero reale λ.

Esercizio 3 (PFB 13/06/2007, n. 1.1). *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali; si definisca*

$$s_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(i) Dimostrare che se $a_n\to l$, allora $s_n\to l$.

(ii) Dimostrare che se $\{a_n\}$ è monotona crescente, allora anche s_n è monotona crescente.

Esercizio 4 (PFB 13/06/2007, n. 1.2). *Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la funzione definita da*

$$f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. *Si verifichi che*

$$f(x)=\int_e^{e^x}\frac{1}{\log t}\,\mathrm{d}t \quad \forall x\in(0,+\infty).$$

2. *Si dimostri che f è continua crescente e si dica per quali $x\in\mathbb{R}_+$ si ha $f(x)\geq 0$.*

3. *Si dimostri che, se $x\geq 1$, allora*

$$\frac{e^x-e}{x}\leq f(x)\leq e^x-e$$

mentre, se $x\in(0,1]$,

$$e\log x\leq f(x)\leq (1+x)\log(x).$$

4. *Si calcolino i limiti*

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}f(x), \qquad \lim_{x\to 0^+}xf(x).$$

GEOMETRIA

Esercizio 5 ([2, n. 3 pag. 121]). *Determinare equazioni parametriche della retta di $\mathbf{A}^2(C)$ parallela al vettore $\mathbf{v}$ e passante per il punto $r\cap s$ in ciascuno dei casi seguenti:*

$$a)\mathbf{v}=(2,4),\quad r:3X-2Y-7=0,\quad s:2X+3Y=0$$
$$b)\mathbf{v}=(-5\sqrt{2},7),\quad r:X-Y=0,\quad s:X+Y=1$$

Esercizio 6 (PFB 01/02/2006, n. 2.2). *Siano α_n,β_n i numeri interi definiti da $(3+4i)^n=\alpha_n+\beta_n i$, per $n\geq 1$. Dimostrare, per induzione su n, che risulta $\alpha_n\equiv 3 \pmod 5$ e $\beta_n\equiv 4 \pmod 5$, per ogni $n\geq 1$.*
Stabilire inoltre se $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ è una radice m-sima dell'unità per qualche $m\geq 1$.

Esercizio 7 (PFB 01/02/2007, n. 2.2). *Sia $\mathbb{P}_3$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o eguale a 3. Si scriva $22+11x-6x^2+x^3$ come combinazione lineare dei polinomi $1,(x-2),(x-2)^2$ e $(x-2)^3$. Si dimostri che $\{1,(x-2),(x-2)^2,(x-2)^3\}$ è una base di $\mathbb{P}_3$.*

Esercizio 8 (PFB 03/10/2007, n. 2.3). *Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$ sia r la retta di equazioni parametriche*

$$(x,y,z)=(1+t,1-t,0).$$

Si determini una retta s passante per il punto $(0,2,0)$ in modo tale che il piano contenente r e s contenga anche l'origine degli assi coordinati e si dimostri che s è l'unica con queste proprietà.

Riferimenti bibliografici

[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri, 2003.

[2] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.

PFB - Tutorato 3

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

24 gennaio 2008

ANALISI

Es. 1

1. Osserviamo che
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} 2nx^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{2n} \tag{1}$$
poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n$ converge totalmente nell'intervallo $[-1+\delta, 1-\delta]$ per ogni $0 < \delta < 1$ allora possiamo scambiare la serie con la derivata
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{2n} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \frac{-2x(1+x^2)+x^2 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-x}{(1+x^2)^2}. \tag{2}$$

2. Usando le proprietà di linearità delle serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{3}$$
La prima serie è nota; per la seconda, invece, applichiamo una strategia inversa alla precedente (sfruttando la convergenza totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}$):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-t)|_0^x = -\ln(1-x). \tag{4}$$
Il risultato finale è dunque
$$\frac{x}{1-x} + \ln(1-x). \tag{5}$$

3. Dalla convergenza totale della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n$ abbiamo
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n\,\mathrm{d}t \stackrel{*}{=} \int_0^x -\ln(1-t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$
dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato una serie calcolata al punto precedente. Poniamo ora $s = 1-t$ e quindi $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$:
$$\int_1^{1-x} \ln(s)\,\mathrm{d}s = s\ln s - s|_1^{1-x} = (1-x)\ln(1-x) - (1-x) - 1\ln 1 + 1 = (1-x)\ln(1-x) + x. \tag{7}$$

Es. 2

(i) Notiamo innanzitutto che $f(x)$ è dispari, in quanto la sua derivata è una funzione pari (in particolare, dunque, $f(0) = 0$). Poiché f è la primitiva di una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, allora segue dal teorema fondamentale del calcolo che essa è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, pertanto il suo dominio è proprio $\mathbb{R}$. La sua derivata, ovvero $e^4 - e^{t^2}$ si annulla solo per $t = \pm 2$. Studiamo la natura di questi punti critici:
$$f''(x) = -2xe^{x^2} \Rightarrow f''(2) = -4e^4 < 0. \tag{8}$$
Quindi 2 è un punto di massimo relativo di f e, poiché f è dispari, -2 è un punto di minimo relativo: dunque f è strettamente crescente per $-2 \le x \le 2$, e strettamente decrescente altrimenti. Sempre dalla derivata seconda, notiamo inoltre che f è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$. Se ne intuisce che per $x > 0$ la funzione decresce progressivamente e che il suo limite è $-\infty$. Confermiamolo con dei calcoli espliciti: poiché per $t \ge 1$ si ha $e^{t^2} \ge e^t$
$$\int_0^x e^4 - e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^4 - e^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x e^4 - e^{t^2}\,\mathrm{d}t \le c + \int_1^x e^4 - e^t\,\mathrm{d}t = c + e^4(x-1) - e^x + e \to -\infty. \tag{9}$$
Poiché f è dispari, chiaramente $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Dato che $f(2) > 0$, allora questo significa che f ha uno zero sul semiasse positivo (e quindi anche uno zero speculare sul semiasse negativo) per un totale di tre zeri.

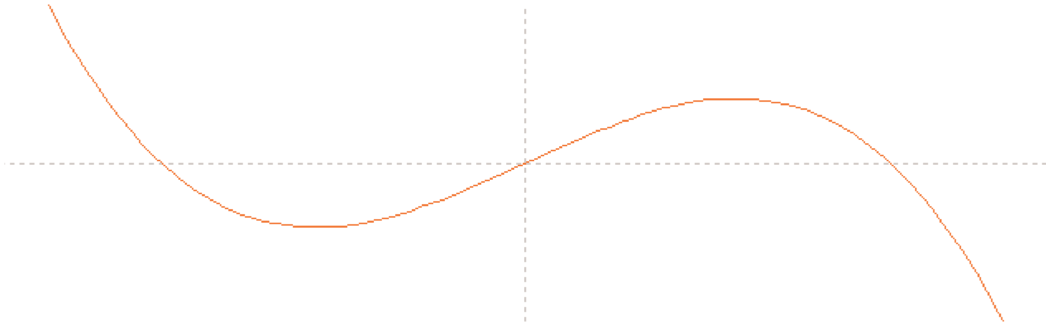

Figura 1: Grafico qualitativo di f.

(ii) Per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha $f(0) = 0 = \lambda 0$, quindi c'è sempre almeno una soluzione. Notiamo inoltre che, poiché f è dispari, se $x_0 \neq 0$ è soluzione dell'equazione $f(x) = \lambda x$, allora anche $-x_0$ lo è:

$$-f(x_0) = f(-x_0) = \lambda(-x_0) = -\lambda x_0. \tag{10}$$

Ancora dal fatto che f è dispari, se per un dato λ si ha che $x_1, \ldots, x_n$ sono soluzioni, allora $-x_1, \ldots, -x_n$ sono soluzioni per $-\lambda$:

$$-f(x_i) = f(-x_i) = (-\lambda)x_i = -\lambda x_i. \tag{11}$$

Per quanto detto al punto precedente, se $\lambda = 0$ ci sono tre soluzioni. Limitiamoci dunque a considerare il caso $\lambda > 0$: se λ è grande, allora la retta interseca il grafico di f solo nell'origine, altrimenti ci sono tre soluzioni $-x_0, 0, x_0 > 0$.

Es. 3 (i) Per ogni $\epsilon > 0$ sia $n_0 \gg 0$ tale che $l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Allora

$$s_n = \frac{a_1 + \ldots a_n}{n} = \frac{a_1 + \ldots a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_n}{n}, \qquad \frac{a_1 + \ldots a_{n_0}}{n} \to 0, \tag{12}$$

$$l - \epsilon = \lim_{n\to\infty} (l-\epsilon)\frac{(n-n_0)}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_n}{n} \leq \lim_{n\to\infty} (l+\epsilon)\frac{a_{n_0+1} + \ldots a_n}{n} = l + \epsilon. \tag{13}$$

(ii) Dimostriamo che $s_{n+1} \geq s_n$:

$$n[a_1 + \cdots + a_{n+1}] \geq (n+1)[a_1 + \cdots + a_n] \tag{14}$$

$$n[a_1 + \cdots + a_n] + na_{n+1} \geq n[a_1 + \cdots + a_n] + [a_1 + \cdots + a_n] \tag{15}$$

$$na_{n+1} \geq [a_1 + \ldots a_n] \tag{16}$$

le disuguaglianze precedenti sono equivalenti, e l'ultima segue sommando da 1 a n le diseguaglianze $a_{n+1} \geq a_i$.

Es. 4 1. Basta porre $z = e^t$, ovvero $\log z = t$, da cui $e^t \, \mathrm{d}t = \mathrm{d}z$:

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \, \mathrm{d}t = \int_e^{e^x} \frac{1}{\log z} \, \mathrm{d}z. \tag{17}$$

2. f è la primitiva di una funzione continua su $(0, +\infty)$, quindi è ivi derivabile e in particolare continua. Poiché la sua derivata è sempre strettamente positiva, allora f è crescente per ogni $x \in \mathbb{R}_+$. Siccome $f(1) = 0$, allora $f(x) \geq 0$ per ogni $x \geq 1$.

3. Per ogni $t \in [1, x]$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1 \tag{18}$$

quindi, moltiplicando per e^t e integrando tra 1 e x:

$$\frac{e^x - e}{x} = \int_1^x \frac{e^t}{x} \, \mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{e^t}{t} \, \mathrm{d}t \leq \int_1^x e^t = e^x - e. \tag{19}$$

Analogamente, se $x \in (0, 1]$, poiché per $t \in [x, 1]$ vale

$$1 + x \leq e^x \leq e^t \leq e \Rightarrow 1 + x \leq e^t \leq e \tag{20}$$

allora, moltiplicando per $\frac{1}{t}$ e integrando tra 1 e x:

$$(1+x)\log(x) = \int_1^x (1+x)\frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{e^t}{t} \, \mathrm{d} \leq \int_1^x \frac{e}{t} \, \mathrm{d}t = e\log(x). \tag{21}$$

4. Il primo limite può essere riscritto come
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}. \tag{22}$$
Essendo della forma $\frac{\infty}{\infty}$, applichiamo de l'Hôpital e otteniamo
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0. \tag{23}$$
Per l'altro limite, usiamo la disuguaglianza (21) dimostrata al punto precedente:
$$0=\lim_{x\to0^+}ex\log(x)\leq\lim_{x\to0^+}xf(x)\leq\lim_{x\to0^+}(1+x)x\log(x)=0 \tag{24}$$
i due limiti esterni seguono dal ben noto limite $\lim_{x\to0^+}x\log x=0$ e dalle regole per il limite di un prodotto.

GEOMETRIA

Es. 5 a) Determiniamo innanzitutto il punto $r\cap s$:
$$\begin{cases}3X-2Y-7=0\\2X+3Y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3X-\frac{4}{3}X-7=0\\Y=-\frac{2}{3}X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{3}X=7\\Y=-\frac{2}{3}X\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=\frac{21}{5}\\Y=-\frac{14}{5}\end{cases} \tag{25}$$
La retta cercata è $(x(t),y(t))=(\frac{21}{5},-\frac{14}{5})+t(2,4)=(\frac{21}{5}+2t,-\frac{14}{5}+4t)$.

b) Procediamo esattamente come prima
$$\begin{cases}X-Y=0\\X+Y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y=X\\2X=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Y=\frac{1}{2}\\X=\frac{1}{2}\end{cases} \tag{26}$$
In questo caso la retta è $(x(t),y(t))=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})+t(-5\sqrt{2},7)=(\frac{1}{2}-5\sqrt{2}t,\frac{1}{2}+7t)$.

Es. 6 Il caso $n=1$ segue dalla definizione. Veniamo al passo induttivo: supponiamo di aver mostrato che $\alpha_n\equiv_5 3$ e $\beta_n\equiv_5 4$, dimostriamo che allora $\alpha_{n+1}\equiv_5 3$ e $\beta_{n+1}\equiv_5 4$.
$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}+\beta_{n+1}i=(3+4i)^{n+1}=(3+4i)^n(3+4i)\equiv_5(\alpha_n+\beta_n i)(3+4_i)\equiv_5(3\alpha_n-4\beta_n)+(4\alpha_n+3\beta_n)i\\\equiv_5(9-16)+(12+12)i\equiv_5-7+24i\equiv_5 3+4i\end{aligned} \tag{27}$$
Se $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ fosse una radice primitiva m-sima, allora la sua potenza m-sima dovrebbe essere 1. Tuttavia,
$$\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)^m=\frac{(3+4_i)^m}{5^m}=\frac{\alpha_m+\beta_m i}{5^m} \tag{28}$$
dove $\beta_m\equiv_5 4$ per ogni m. In particolare $\beta_m\neq0$ per ogni m (mentre l'unità ha parte immaginaria nulla).

Es. 7 Ci sono (almeno) due strategie per trovare una combinazione lineare per $22+11x-6x^2+x^3$: la prima segue dalla definizione, si scrive il polinomio come somma degli elementi della base con coefficienti da determinare e si risolve il sistema lineare di 4 equazioni in 4 incognite; la seconda (che seguiremo) consiste nel dividere il polinomio per l'elemento della base di grado massimo, prendere il resto e dividerlo per il secondo elemento della base e così via.
$$(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8,\qquad(x-2)^2=x^2-4x+4,\qquad x-2,\qquad 1 \tag{29}$$
$$\begin{array}{rrrr|l}x^3&-6x^2&+11x&+22&x^3-6x^2+12x-8\\\cline{5-5}x^3&-6x^2&+12x&-8&1\\&&-x&+30&\end{array}\quad\begin{array}{rr|l}-x&+30&x^2-4x+4\\\cline{3-3}&&0\\-x&+30&\end{array}\quad\begin{array}{rr|l}-x&+30&x-2\\\cline{3-3}-x&+2&-1\\&+28&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}+28&1\\\cline{2-2}+28&28\\0&\end{array} \tag{30}$$
Quindi $22+11x-6x^2+x^3=(x-2)^3+0\cdot(x-2)^2-(x-2)+28\cdot1$.
Per la seconda parte, ci basta dimostrare che gli elementi della base canonica di $\mathbb{P}_3$, ovvero $\{1,x,x^2,x^3\}$ sono ottenibili come combinazione lineare di $\{1,x-2,(x-2)^2,(x-2)^3\}$.
$$\begin{array}{rrrr|l}x^3&&&&x^3-6x^2+12x-8\\\cline{5-5}x^3&-6x^2&+12x&-8&1\\&6x^2&-12x&+8&\end{array}\quad\begin{array}{rrr|l}6x^2&-12x&+8&x^2-4x+4\\\cline{4-4}6x^2&-24x&+24&6\\&12x&-16&\end{array}\quad\begin{array}{rr|l}12x&-16&x-2\\\cline{3-3}12x&-24&6\\&8&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}8&1\\\cline{2-2}8&8\\0&\end{array} \tag{31}$$
$$\begin{array}{rrr|l}x^2&&&x^2-4x+4\\\cline{4-4}x^2&-4x&+4&1\\&4x&-4&\end{array}\quad\begin{array}{rr|l}4x&-4&x-2\\\cline{3-3}4x&-8&4\\&4&\end{array}\quad\begin{array}{r|l}4&1\\\cline{2-2}4&4\\0&\end{array} \tag{32}$$
Quindi $x^3=(x-2)^3+6(x-2)^2+6(x-2)+8$, $x^2=(x-2)^2+4(x-2)+4\cdot1$, $x=(x-2)+2\cdot1$.

Es. 8 Notiamo intanto che $(0,2,0)$ appartiene sia a r che a s. Sembra che ci sia un errore nel testo: se la retta s fosse univocamente determinata allora, detto π il piano che contiene r e s e l'origine, qualsiasi altra retta del fascio proprio di rette passanti per $(0,2,0)$ contenuta in π e diversa da r identifica lo stesso piano. Comunque, una possibile soluzione è prendere la retta contenuta nel piano $\{z=0\}$ passante per $(0,2,0)$ e ortogonale a r, ovvero $(0,2,0)+u(1,1,0)$. Infatti
$$\begin{cases}0=t+u\\0=2-t+u\\0=0\end{cases}\Rightarrow t=1,u=-1. \tag{33}$$

PFB - Tutorato 4

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

28 gennaio 2008

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 01/10/2003, n. 1.1). *Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni*

$$\sum_{n\geq 0} 2^n \sin\frac{x}{3^n}.$$

Esercizio 2 (PFB 02/02/2004, n. 1.3). *Calcolare il limite seguente*

$$\lim_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\log(n!).$$

Esercizio 3 (PFB 06/10/2004, n. 1.4). *Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2yx^2(x^2+2y^2-1), \\ \dot{y} = -2xy^2(2x^2+y^2-1). \end{cases}$$

(i) Verificare che il sistema ammette una costante del moto $H(x,y)$ e determinarla.

(ii) Determinare i punti d'equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.

(iii) Discutere qualitativamente il moto del sistema.

Esercizio 4 (PFB 06/10/2004, n. 1.5). *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(xt^2)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Si dimostri che f è definita e di classe C^1 su $\mathbb{R}$. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

Esercizio 5 (PFB 02/02/2005, n. 1.1). *Calcolare lo sviluppo di Taylor nello 0 all'ordine 5 della funzione*

$$f(x) = \arctan x^2 + \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Esercizio 6 (PFB 22/06/2005, n. 1.3). *Studiare la funzione*

$$f(x) = (x\log x - x)^2.$$

Determinare in particolare il dominio di definizione, i limiti, gli eventuali punti di massimo o di minimo. Determinare quante soluzioni ha l'equazione

$$f(x) = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 7 (PFB 22/06/2005, n. 1.5). *Per $n = 1,2,3,\dots$ sia*

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}$$

e si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n(x).$$

1) Determinare l'insieme dove la serie converge assolutamente.

2) Dimostrare che la serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.

3) Dimostrare che la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

GEOMETRIA

Esercizio 8 (PFB 23/06/2004, n. 2.2).

1. *Provare che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e la sua trasposta ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori.*
2. *Dare un esempio di matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che A e ${}^tA$ non hanno gli stessi autovettori.*
3. *Sia $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e quelli di A^{-1}.*

Esercizio 9 (PFB 06/10/2004, n. 2.2). *Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tali che $AB + BA = B$.*

1. *Verificare che $AB^2 = B^2A$.*
2. *Provare che se B è invertibile, allora per ogni autovalore λ di A anche $1-\lambda$ è un autovalore di A.*
3. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice B tale che $AB + BA = B$ e $B^2 = I$.

Esercizio 10 (PFB 02/02/2005, n. 2.1). *Calcolare*

$$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}^{150}$$

Esercizio 11 (PFB 22/06/2005, n. 2.1). *In accordo con il teorema spettrale ridurre a forma diagonale tramite matrici ortogonali la seguente matrice simmetrica*

$$\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

Esercizio 12 (PFB 01/02/2007, n. 2.4). *Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo è descritta dall'equazione*

$$X^2 + Y^2 - 4XY - 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - 4 = 0.$$

PFB - Tutorato 4

III sessione a.a. 07/08

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

28 gennaio 2008

ANALISI

Es. 1 La serie converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$:

$$\left|\sum_{n\geq 0} 2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \leq \sum_{n\geq 0}\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \leq \sum_{n\geq 0} 2^n \frac{x}{3^n} = |x|\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{|x|}{1-2/3} = 3|x|. \tag{1}$$

Allo stesso modo, vediamo che la serie converge totalmente (e dunque anche uniformemente) sui limitati di $\mathbb{R}$.

Es. 2 Dalla formula di Stirling:

$$\log n! \sim \log\left(\frac{n}{e}\right)^n + \log\sqrt{2\pi n} = n\log n - n + \log\sqrt{2\pi n}. \tag{2}$$

Ricodiamo il ben noto limite

$$\lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

In conclusione,

$$\lim_{n\to\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\log(n!) = \lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos\frac{1}{n})\frac{1}{n^2}[n\log n - n + \log\sqrt{2\pi n}] = 0. \tag{4}$$

Es. 3 (i) Imponiamo che $H_x = -\dot{y}$ e $H_y = \dot{x}$. Integrando nelle due variabili otteniamo che

$$\int 2yx^2(x^2+2y^2-1)\,\mathrm{d}y = \int (2yx^4+4y^3x^2-2yx^2)\,\mathrm{d}y = y^2x^4+y^4x^2-y^2x^2+c(x) \tag{5}$$

$$\int 2xy^2(2x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x = \int (4x^3y^2+2xy^4-2xy^2)\,\mathrm{d}x = x^4y^2+x^2y^4-x^2y^2+c(y) \tag{6}$$

e dal confronto delle due espressioni deduciamo che $c(x) = c(y) = c$. Prendiamo per semplicità $c = 0$.

(ii) La situazione è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \vee y = 0 \vee x^2+2y^2 = 1 \\ \dot{y} = 0 & \Rightarrow \quad x = 0 \vee y = 0 \vee 2x^2+y^2 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Quindi gli assi cartesiani formano due rette di punti di equilibrio. Anche i punti $(\pm\sqrt{3}/3, \pm\sqrt{3}/3)$, individuati dall'intersezione dei due ellissi $x^2+2y^2 = 1$ e $2x^2+y^2 = 1$, sono punti di equilibrio.

Es. 4 f è l'integrale di una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, inoltre c'è dipendenza continua dal parametro x, pertanto f è continua e di più, per il teorema fondamentale del calcolo, è C^1. Per il limite si può usare de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^3}{x} = 0. \tag{8}$$

Es. 5 Poiché $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

$$\arctan'(t) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^{2n}. \tag{9}$$

Integrando l'espressione precedente otteniamo

$$\arctan(t) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{10}$$

A questo punto sostituiamo x^2 in luogo di t e otteniamo

$$\arctan(x^2) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1} = x^2+\mathcal{O}(x^6). \tag{11}$$

Per il secondo pezzo, teniamo presente che

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7), \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \mathcal{O}(x^6). \tag{12}$$

Moltiplicando le due espressioni precedenti (trascurando i termini di ordine superiore) otteniamo

$$\frac{\sin x}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5}{3!} + x^5 + \mathcal{O}(x^6). \tag{13}$$

In conclusione, lo sviluppo di Taylor cercato è

$$\arctan(x^2) + \frac{\sin x}{1+x^2} = x + x^2 - \frac{x^3}{3!} + x^5\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right) + \mathcal{O}(x^6). \tag{14}$$

Es. 6 La funzione è definita per ogni $x > 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \tag{15}$$

Cerchiamo i punti critici:

$$f'(x) = 2\log(x)(x\log(x) - x) = 0 \Rightarrow \log(x) = 0 \vee \log(x) = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = e. \tag{16}$$

Si ha rispettivamente $f(1) = 1$ e $f(e) = 0$, pertanto 1 è un punto di massimo relativo ed e è un punto di minimo relativo. Vediamo inoltre che l'equazione $f(x) = \frac{1}{2}$ ha tre soluzioni: la prima compresa tra 0 e 1; la seconda tra 1 ed e; la terza maggiore di e.

Es. 7 Vedi PFB 22/06/205

GEOMETRIA

Es. 8 (a) Basta osservare che ${}^t({}^tA - \lambda I) = (A - \lambda I)$ e ricordare che il determinante è invariante per trasposizione (quindi le due matrici hanno lo stesso polinomio caratteristico, da cui gli stessi autovalori).

(b) Prendiamo A come

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1. \end{pmatrix} \tag{17}$$

Questa matrice ha autovalori $\lambda = -1, 3$:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4. \tag{18}$$

Cerchiamo ora gli autovettori della matrice:

$$\lambda = -1 : y = 0 \Rightarrow (t, 0), t \in \mathbb{R}; \qquad \lambda = 3 : -2x + 4y = 0 \Rightarrow (2s, s). \tag{19}$$

Ora cerchiamo gli autovettori di ${}^tA$: per esempio, se $\lambda = -1$

$$2x + y = 0 \Rightarrow (u, -2u), \tag{20}$$

quindi gli autovettori sono diversi.

(c) λ è autovalore di A se e solo se λ^{-1} è autovalore di A^{-1}.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow x = A^{-1}\lambda x \Leftrightarrow x = \lambda A^{-1}x \Leftrightarrow \lambda^{-1}x = A^{-1}x. \tag{21}$$

Es. 9
1. $AB = B - BA \Rightarrow AB^2 = B^2 - BAB = B^2 - B(B - BA) = B^2 - B^2 + B^2A$.
2. $BA = B - AB \Rightarrow A = I - B^{-1}AB$, dove $B^{-1}AB$ ha gli stessi autovalori di A.

Es. 10 Sia A la matrice data. Una volta diagonalizzata e ottenuto $D = QAQ^{-1}$, calcoliamo $D^{150} = QA^{150}Q^{-1}$ da cui $A^{150} = Q^{-1}D^{150}Q$.

Es. 12 Dal determinante della matrice A_0 vediamo che si tratta di un ellisse.