PFB - Tutorato 3 (Soluzioni)

Sessione Settembre-Ottobre 2008

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

1 ottobre 2008

ANALISI

Esercizio 1. *Poiché* $f'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} > 0$, *la funzione è monotona crescente. Dato che* $f''(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} \frac{1}{(x-1)^2} > 0$, *$f$ è convessa.*

f è limitata? Studiamo il suo comportamento vicino a 1: *la funzione* $\sqrt{\frac{s}{1-s}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{1-s}}$ *ha una singolarità di ordine* $\frac{1}{2} < 1$, *che è integrabile. Quindi f si può estendere per continuità fino a* 1, *pertanto (dal Teorema di Weierstrass) essa è limitata.*

Esercizio 2. *f è definita per $x > 0$. Riscriviamola come*

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{1-e^t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Calcoliamo i limiti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{1-e^t}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0^+} \int_1^x \frac{t+O(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to 0^+} \int_1^x 1 + O(t)\,\mathrm{d}t = -1,\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1-e^t}{t}\,\mathrm{d}t = -\infty.$$

Studiamo la crescenza: la sua derivata vale

$$f'(x) = \frac{1-e^x}{x} < 0\ \forall x > 0$$

quindi f è monotona decrescente. Dallo studio della derivata seconda,

$$f''(x) = \frac{-e^x(x) - (1-e^x)}{x^2} = \frac{-xe^x - 1 + e^x}{x^2} < 0\ \forall x > 0$$

vediamo che f è concava.

Esercizio 3. *Non ci sono le ipotesi per derivare sotto segno di integrale: la funzione integranda non è equidominata*

$$\left|\frac{\sin(xt^2)}{t}\right| \le \frac{|x|t^2}{|t|} = |xt|$$

e l'intervallo di integrazione dipende da x. Posto allora $g(z,w) = \int_0^z \frac{\sin(wt^2)}{t}\,\mathrm{d}t$, *si ha* $f(x) = g(x,x)$ *da cui* $f'(x) = (\nabla g(x,x),(1,1)) = \frac{\sin(x^3)}{x} + \int_0^x \frac{t^2\cos(xt^2)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(x^3)}{x} + \int_0^x t\cos(xt^2)\,\mathrm{d}t$. *Poi*

$$\begin{aligned}\int_0^x t\cos(xt^2)\,\mathrm{d}t &\overset{\substack{xt^2=y,\\ 2xt\mathrm{d}t=\mathrm{d}y}}{=} \int_0^{x^3} \frac{\cos(y)}{2x}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{\sin(y)}{2x}\right]_0^{x^3} = \frac{\sin(x)}{2x^3}.\end{aligned}$$

Quindi $f'(x) = \frac{\sin(x)}{x^3} + \frac{\sin(x)}{2x^3} = \frac{3}{2}\frac{\sin(x)}{x^3}$ *è C^0 (non è definita in 0, ma è ivi prolungabile ponendola uguale a 0), da cui f è C^1.*

Usando de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

Esercizio 4. *1) f è definita per $x \neq 0$ ed essendo l'integrale di una funzione dispari è pari.*

2)

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_x^{2x} \left[\frac{1}{t} + o(1)\right]\mathrm{d}t \\ &= \log 2 - x(o(1)|_{x=\xi}) \to_{x\to 0} \log 2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\right| &\le \lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\mathrm{d}t \\ &\le \left|\lim_{x\to\infty} \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2}\right| \to 0.\end{aligned}$$

3) Prendiamo $\tilde{f} = \begin{cases} \log 2 \text{ se } x = 0 \\ f(x) \text{ altrimenti} \end{cases}$.

4) Per vedere che $\tilde{f}$ è Lipschitz basta mostrare che la sua derivata è limitata.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\frac{\sin(2x)}{4x^2} - \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{2\sin(2x) - 4\sin(x)}{4x^2} \\ &= \frac{4\sin(x)\cos(x) - 4\sin(x)}{4x^2} = \sin(x)\frac{\cos(x)-1}{x^2}\end{aligned}$$

$f'(x)$ (dato che $\frac{\cos(x)-1}{x^2} \to_{x\to 0} -\frac{1}{2}$) *è limitata su tutto $\mathbb{R}$.*

Esercizio 5. *La funzione è definita per $x > 0$.*

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

La derivata di f vale $2(x\log x - x)(\log x + 1 - 1) = 2\log x(x\log x - x)$ *e si annulla in $x = 1, e$ (rispettivamente massimo e minimo relativo) dove vale 1 e 0. Quindi, per il Teorema dei valori intermedi, l'equazione* $f(x) = \frac{1}{2}$ *ha tre soluzioni* x_1, x_2, x_3 *tali che* $0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < e, x_3 > e$.

Esercizio 6. *(i) La funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è una funzione dispari (essendo l'integrale di una funzione pari).*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

La sua derivata prima, $e^4 - e^{x^2}$, *si annulla in $x = -2, 2$, rispettivamente minimo e massimo relativo (quindi f è crescente tra -2 e 2 e decrescente altrove). La derivata seconda vale* $-2xe^{x^2}$ *e ci dice che f è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$.*

(ii) Dallo studio del grafico della funzione, si deduce che se $\lambda > f'(0)$, l'equazione ha 0 come unica soluzione; altrimenti, ci sono altre due soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

GEOMETRIA

Esercizio 7. *Se* $n = 1$*, non c'è niente da dimostrare. Supponiamo vera la tesi per* n *e dimostriamola per* $n+1$*:* $(3+4i)^{n+1} = (3+4i)^n(3+4i) \equiv (\alpha_n + \beta_n i)(3+4i) \equiv (3\alpha_n - 4\beta_n) + (4\alpha_n + 3\beta_n)i \equiv 3+4i$*.*

Se per assurdo $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ *fosse una radice m-sima dell'unità allora* $(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)^m = \frac{(3+4i)^m}{5^m} \equiv \frac{3+4i}{5^m} \neq 1 \forall m \geq 1$*.*

Esercizio 8. *Siano per assurdo* $a_0, \ldots, a_{m-1}$ *non tutti nulli tali che* $a_0 v + \cdots + a_{m-1}L^{m-1}v = 0$*. Applicando* L $m-1$ *volte a* $a_0 v + \cdots + a_{m-1}L^{m-1}v$ *otteniamo* $a_0 L^{m-1}v = 0$*, da cui, poiché per ipotesi* $L^{m-1}v \neq 0$*, si ha* $a_0 = 0$*; applichiamo ora* L $m-2$ *volte a* $a_1 Lv + \cdots + a_{m-1}L^{m-1}v$ *e otteniamo* $a_1 L^{m-1}v = 0$*, da cui, come prima,* $a_1 = 0$*. Continuando così ricorsivamente* $a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0$*.*

Esercizio 9. *Basta scrivere la definizione, scambiare le sommatorie, commutare i prodotti e il gioco è fatto.*

$$\operatorname{tr}(AB) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik} =: \operatorname{tr}(BA).$$