Tutorato 3 PFB — Soluzioni

Prima prova d'accesso a.a. 2008/2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

1 giugno 2009

ANALISI

Esercizio 1. Diamo gli enunciati fondamentali e mini-dimostrazioni:

Teorema 1. *Sia $I = (a, b)$ e siano $f_n(x) \in C^1(I)$ una successione di funzioni t.c.*

1. $\forall x \in I$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ *converge uniformemente;*
2. $\exists x_0 \in I$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ *converge.*

Allora

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Dimostrazione. Poiché la serie delle derivate converge uniformemente si può integrare termine a termine: $\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} (f(x) - f(x_0)) = (\sum_{n=1}^{\infty} f(x)) - (\sum_{n=1}^{\infty} f(x_0))$. Derivando si ottiene la tesi. □

Teorema 2. *Sia $s_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze convergente in $x = x_0$. Allora:*

1. *detto $r = |x_0|$, $s_n(x)$ converge uniformemente in $[-\delta, \delta]$ $\forall 0 < \delta < r$;*
2. *la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ converge assolutamente in $(-r, r)$.*

Dimostrazione. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ converge, $\exists N : \forall n \geq N \left|a_n x_0^n\right| < 1$

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_0^n (x/x_0)^n\right| \leq \left|a_n x_0^n\right| |x/x_0|^n \leq |x/x_0|^n.$$

Per confronto con la serie geometrica si ha la tesi. □

Come si applicano i teoremi precedenti al nostro caso? Mettendo insieme i due teoremi, se c'è un punto x_0 in cui la serie di potenze converge, allora per ogni $\delta < |x_0|$ essa converge su tutto l'intervallo $[-\delta, \delta]$ e si può calcolare la derivata della serie come la serie delle derivate. La serie converge, ad esempio, in $x_0 = 3/4$ quindi converge uniformemente per ogni $|x| \leq 2/3$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \overset{x=2/3}{=} 6.$$

Esercizio 2. Con il cambiamento di variabili proposto il dominio si trasforma in un rettangolo

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}, \quad (x, y) = \Phi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{u+v}{2}}, \sqrt{\frac{u-v}{2}}\right),$$

$$\nabla\Phi(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+v}} & \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{2\sqrt{u-v}} \end{pmatrix}, \quad \det \nabla\Phi(u, v) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{u-v}, \quad xy = \frac{1}{2}(u-v).$$

Inoltre, la funzione da integrare si semplifica nel prodotto di una funzione della sola u e di una della sola v

$$\int_A xy(x^4 - y^4) \log(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_R \frac{1}{\sqrt{2}} uv \log u \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^2 u \log u \,\mathrm{d}u \int_0^1 v\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}u^2 \log(u) - \frac{u^2}{4}\right)\Bigg|_1^2 \frac{v^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{3}{4} + \log 4\right) \frac{1}{2}.$$

Esercizio 3.

1. È immediato che, usando Fubini (basta anche Tonelli), $\int_Q x^\alpha y^\beta \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} x^\alpha \,\mathrm{d}x\right) y^\beta \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha+1} \frac{1}{\beta+1} \forall \alpha, \beta > -1$.
2. Integrando le prime due identità si ottengono le seconde dopo aver scambiato serie e integrale. Nel primo caso per il teorema di convergenza monotona, nel secondo per quello di convergenza dominata (la prima serie domina la seconda); notiamo che raccogliendo i termini della sommatoria due a due, si può usare la convergenza monotona anche nel secondo caso.
3. Riscriviamo la serie dell'enunciato come $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Ne ricaviamo che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$. Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$.

$$\int_Q \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_Q \frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Esercizio 4. L'insieme S corrisponde alla sfera di raggio R intersecata con l'ottante positivo. Notiamo che il dominio di integrazione è simmetrico nelle tre variabili, quindi $\int_S x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{3} \int_S (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$$(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta),$$

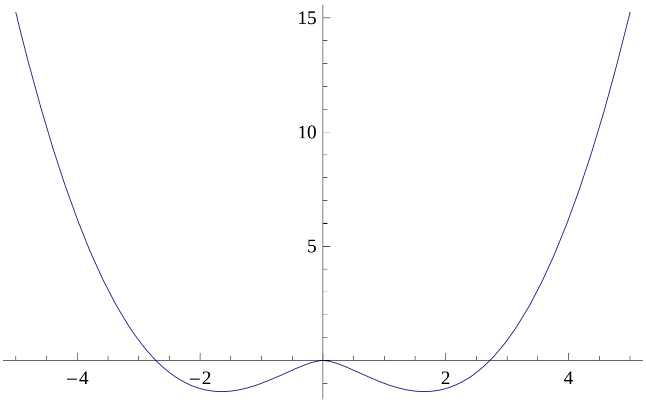
$$(r, \theta, \phi) = \Phi^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right)$$

$$\nabla\Phi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \cos\phi \sin\theta \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \Phi(r, \theta, \phi) = r^2 \sin\theta.$$

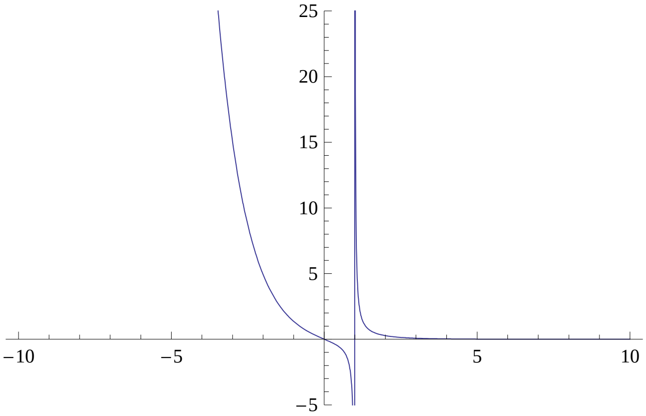
$$\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^2 r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\phi\right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^R r^4 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{3} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^R = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{\pi}{30} R^5.$$

Esercizio 5.

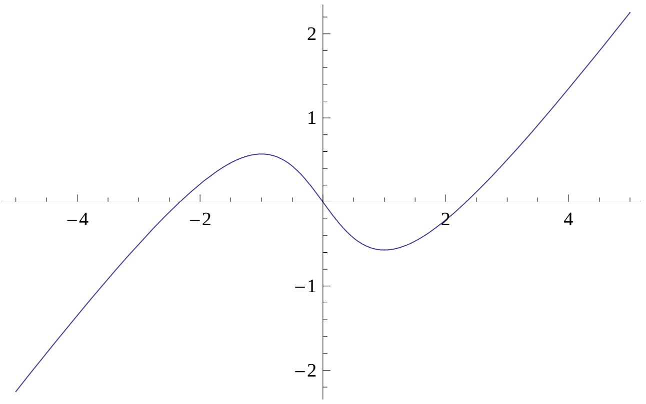
- La funzione $f(x) = x^2(\log|x| - 1)$ è pari, il limite a $+\infty$ (e quindi anche a $-\infty$) vale $+\infty$ mentre il limite in zero è zero (discontinuità eliminabile). La sua derivata non è definita nell'origine e vale $2x(\log|x| - 1) + x^2(1/x) = x(2\log|x| - 1)$ se $x \neq 0$, da cui si ottiene che f ha un punto critico in $\pm\sqrt{e}$. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, allora f ha due minimi in $\pm\sqrt{e}$ e pertanto l'origine è punto di massimo. Dato che $f(0) = 0$ e f ha due minimi, complessivamente f ha tre zeri $\{-a, 0, a\}$. Poiché $f''(x) = 2\log|x| + 1$ se $x \neq 0$, allora f è convessa fuori da $[-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}]$



- Poiché l'esponenziale non si annulla mai, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{x-1}$ ha un unico zero nell'origine. La funzione ha un asintoto verticale in $x = 1$ e $\lim_{x\to1^\pm} = \pm\infty$. Inoltre $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$. La derivata vale $-\frac{e^{-x}(x^2-x+1)}{(x-1)^2} < 0$, non si annulla mai e tende a $-\infty$ quando x tende a 1. Poiché $g''(x) = \frac{e^{-x}x\left(x^2-2x+3\right)}{(x-1)^3}$, g è convessa per $x \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$.



- Dato che x e $\arctan x$ hanno entrambe uno zero nell'origine, allora così $h(x) = x - 2\arctan x$. Inoltre essendo h combinazione lineare di funzioni dispari è anch'essa dispari. Le sue derivate sono $h'(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1}$ e $h''(x) = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Poiché la derivata prima in zero è negativa (si annulla in $x = \pm1$, allora $x = -1$ (risp $x = 1$) è punto di massimo (risp. minimo) relativo e considerando che $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$, allora $h(x)$ ha altri due zeri $\{-z, z\}$ in posizione simmetrica rispetto all'origine. Poiché $\arctan x$ è limitata, $y = x$ è asintoto obliquo di $h(x)$.



GEOMETRIA

Esercizio 6. Consideriamo le seguenti matrici

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \qquad AX = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 & 3x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \end{pmatrix}, \qquad XA = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 & x_1 + x_2 \\ 3x_3 + 2x_4 & x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Per avere $AX = XA$ basta eguagliare le due matrici elemento per elemento, ottenendo così un sistema lineare (omogeneo) di quattro equazioni in quattro incognite. Essendo V la soluzione di questo sistema lineare, è un sottospazio lineare. Le coppie (Δ_1, Δ_2) sono date, al variare di $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, esattamente da (AX, XA).

Esercizio 7. Partiamo trovando i coefficienti della matrice F in funzione di k. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} F(e_2) + 2F(e_3) = 8e_1 + (-2 + 2k)e_2 + 16e_3 \\ 2F(e_1) - F(e_3) = e_1 + (-2 - 2k)e_2 - 2e_3 \\ F(e_1) + 3F(e_2) - F(e_3) = 4e_1 + (-7 - k)e_2 + 8e_3 \end{cases}.$$

Isoliamo $F(e_2)$ dalla prima equazione: $F(e_2) = 8e_1 + (-2 + 2k)e_2 + 16e_3 - 2F(e_3)$. Sostituendo nella terza equazione otteniamo $F(e_1) + 24e_1 + (-6 + 6k)e_2 + 48e_3 - 6F(e_3) - F(e_3) = 4e_1 + (-7 - k)e_2 + 8e_3$, da cui $F(e_1) = -20e_1 + (-1 - 7k)e_2 - 40e_3 + 7F(e_3)$. Sostituiamo $F(e_3)$ nella seconda equazione: $F(e_3) = e_1 + (2 + 2k)e_2 + 2e_3 - 40e_1 + (-2 - 14k)e_2 - 80e_3 + 14F(e_3) \Rightarrow F(e_3) = 3e_1 + \frac{12k}{13}e_2 + 6e_3$. Ora sostituiamo $F(e_3)$ nell'espressione di $F(e_1)$ che abbiamo ottenuto prima: $F(e_1) = -20e_1 + (-1 - 7k)e_2 - 40e_3 + 21e_1 + \frac{84k}{13}e_2 + 42e_3 = e_1 + \left(-1 - \frac{7k}{13}\right)e_2 + 2e_3$. Infine $F(e_2) = 2e_1 + \left(-2 + \frac{2k}{13}\right)e_2 + 4e_3$. La matrice F vale

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\frac{7k}{13} - 1 & \frac{2k}{13} - 2 & \frac{12k}{13} \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

L'immagine di F è generata dai vettori colonna della matrice. Il nucleo è

$$\mathrm{Ker}F = E_F(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -\frac{7k}{13} - 1 & \frac{2k}{13} - 2 & \frac{12k}{13} \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z \\ \left(-\frac{7k}{13} - 1\right)(-2y - 3z) + \left(\frac{2k}{13} - 2\right)y + \frac{12k}{13}z = \frac{1}{13}(16ky + (39 + 33k)z) \end{cases}.$$

Quindi $(x, y, z) = \left(\frac{3(3k+13)z}{8k}, -\frac{3(11kz+13z)}{16k}, z\right), z \in \mathbb{R}$ se $k \neq 0$ e $(x, y, z) = (-2y, y, 0), y \in \mathbb{R}$ se $k = 0$. Il nucleo, che ha dimensione 1 per ogni k è generato da $\left(\frac{3(3k+13)}{8k}, -\frac{3(11k+13)}{16k}, 1\right)$ se $k \neq 0$ e da $(-2, 1, 0)$ se $k = 0$. Una base per l'immagine è data da $\left\{\left(1, -\frac{7k}{13} - 1, 2\right), \left(2, \frac{2k}{13} - 2, 4\right)\right\}$ se $k \neq 0$ e da $\{(2, -2, 4), (3, 0, 6)\}$ se $k = 0$ (abbiamo già visto i vettori che *generano* l'immagine, basta trovare tra essi due vettori indipendenti al variare del parametro k).
Posto $k = -3$ otteniamo la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{13} & -\frac{32}{13} & -\frac{36}{13} \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori $\left\{\frac{1}{26}\left(59 + \sqrt{8473}\right), \frac{1}{26}\left(59 - \sqrt{8473}\right), 0\right\}$, tutti diversi tra loro ed è quindi diagonalizzabile. I primi due autovettori (rispettivamente di autovalori $\frac{1}{26}\left(59 + \sqrt{8473}\right), \frac{1}{26}\left(59 - \sqrt{8473}\right)$) sono $\left(1, \frac{-2648+8\sqrt{8473}}{2015+13\sqrt{8473}}, \frac{1}{72}\left(16 - \frac{123\left(-2648+8\sqrt{8473}\right)}{2015+13\sqrt{8473}} - \frac{\sqrt{8473}\left(-2648+8\sqrt{8473}\right)}{2015+13\sqrt{8473}}\right)\right)$ e $\left(1, \frac{2648+8\sqrt{8473}}{-2015+13\sqrt{8473}}, \frac{1}{72}\left(16 - \frac{123\left(2648+8\sqrt{8473}\right)}{-2015+13\sqrt{8473}} + \frac{\sqrt{8473}\left(2648+8\sqrt{8473}\right)}{-2015+13\sqrt{8473}}\right)\right)$ e l'ultimo è il generatore del nucleo $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 1\right)$. In questa base la matrice è la matrice diagonale che ha per diagonale $\left\{\frac{1}{26}\left(59 + \sqrt{8473}\right), \frac{1}{26}\left(59 - \sqrt{8473}\right), 0\right\}$.

Esercizio 8. (a) Il determinante di un elemento di K è $a^2 + b^2$ ed è congruo a 0 modulo 3 sse $(a, b) = (0, 0)$ quindi solo la matrice nulla non ha inverso. Per quanto riguarda il prodotto e la somma e l'opposto:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} \in K, \qquad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \in K, \qquad \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}.$$

(b) Cerchiamo un polinomio f di grado 2 irriducibile. Poiché il primo e l'ultimo coefficiente non possono essere zero, ci sono al più $2^2 3 = 12$ possibilità. Con qualche prova $f(X) = X^2 + 1$. Poi basta mandare $aX + b$ in $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Per un generatore, prendere $a = b = 1$. Poiché l'ordine di un elemento di K è un divisore di 8, basta far vedere che il suo quadrato e la sua quarta potenza non diano l'elemento neutro perché si tratti di un generatore.