Tutorato 3 PFB

Prima prova d'accesso a.a. 2008/2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

1 giugno 2009

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 03/10/08, n. 1.6)**.** Si enunci e brevemente si dimostri il teorema di differenziazione per serie, con particolare riguardo alle serie di potenze. Riconducendosi a un'opportuna serie di potenze, calcolare

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot n.$$

Esercizio 2 (PFB 12/06/08, n. 1.5)**.** Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_A xy(x^4-y^4)\log(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\geq 0, y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 2, 0\leq x^2-y^2\leq 1\}.$$

Potrebbe essere utile il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u=x^2+y^2\\ v=x^2-y^2.\end{cases}$$

Esercizio 3 (PFB 30/01/08, n. 1.5)**.**

1. Sia $Q=(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$. Calcolare
$$\int_Q x^\alpha y^\beta\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
per gli α e β reali per cui risulta finito.
2. Si ricordi che, per $(x,y)\in Q$,
$$\frac{1}{1-xy}=\sum_{k=0}^{\infty}x^ky^k,\qquad \frac{1}{1+xy}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^ky^k.$$
Dire se è vero che
$$\int_Q\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{\infty}\int_Q x^ky^k\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
e
$$\int_Q\frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{\infty}\int_Q(-1)^kx^ky^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
3. Ricordando che $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ e usando il punto precedente, calcolare
$$\int_Q\frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
e
$$\int_Q\frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Esercizio 4 (PFB 07/10/05, n. 1.2)**.** Si consideri l'insieme di $\mathbb{R}^3$

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\}.$$

Calcolare

$$\iiint_S x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

spiegando accuratamente tutti i passaggi.

Esercizio 5 ([1, n. 10.4 pag. 385])**.** Tracciare il grafico delle funzioni seguenti:

9. $x^2(\log|x|-1)$ 12. $\dfrac{xe^{-x}}{x-1}$ 18. $x-2\arctan x$.

GEOMETRIA

Esercizio 6 (PFB 30/01/09, n. 2.2)**.** Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

una matrice assegnata. Verificare che l'insieme

$$V=\{X\in M_2(\mathbb{R}): XA \text{ e } AX \text{ sono matrici simmetriche}\}$$

è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$. Esplicitare le coppie (Δ_1,Δ_2) tali che esista una matrice $X\in V$ per cui $AX=\Delta_1$, $XA=\Delta_2$.

Esercizio 7 (PFB 30/01/08, n. 2.5)**.** Si consideri l'applicazione $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{aligned}F(0,1,2)&=(8,-2+2k,16)\\ F(2,0,-1)&=(-1,-2-2k,-2)\\ F(1,3,-1)&=(4,-7-k,8).\end{aligned}$$

Per ogni valore di k si determini una base per il nucleo e l'immagine di F.

Posto $k=-3$, verificare che F è diagonalizzabile, scrivere una matrice diagonale ad essa associata e una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale tale matrice rappresenta F.

Esercizio 8 (PFB 01/07/03, n. 2.4)**.** Sia K l'insieme di tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\qquad \text{con } a,b\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

(a) Mostrare che k è un campo.

(b) Determinare esplicitamente un polinomio irriducibile $f(X)$ dell'anello dei polinomi $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$ ed un isomorfismo tra l'anello quoziente $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]/(f(X))$ e K.

(c) Il gruppo moltiplicativo K^* degli elementi non nulli del campo K forma un gruppo ciclico di ordine 8. Determinarne esplicitamente un generatore.

Riferimenti bibliografici

[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 1*. Bollati Boringhieri, 2002.