PFB - Tutorato 3 (Soluzioni)

Sessione Gennaio-Febbraio 2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

27 gennaio 2009

ANALISI

Esercizio 1. *(i) Si verifica che $x^4+y^4+x^2-y^2=0$ in quei punti.*

(ii) Vedi [1, pag. 146].

(iii) Posto $F(x,y)=x^4+y^4+x^2-y^2$, per la prima parte basta verificare che $F_y(0,\pm1)(=2)\neq 0$; per la seconda, dato che $\nabla F(x,y)=(4x^3+2x,4y^3-2y)$, $F(x,y(x))=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y(x))=0 \Rightarrow \langle\nabla F(x,y(x)),(1,y'(x))\rangle=0 \Rightarrow 0\pm(2)y'(0)=0 \Rightarrow y'(0)=0$.

(iv) Le ipotesi del teorema non valgono perché $\nabla F(0,0)=(0,0)$.

(v) Dal sistema

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ \nabla(y)=\lambda\nabla F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4+x^2-y^2=0 \\ (0,1)=\lambda(4x^3+2x,4y^3-2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^4+y^4+x^2-y^2=0 \\ 0=\lambda 2x(2x^2+1) \\ 1=\lambda 2y(2y^2-1) \quad [\lambda\neq 0!] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4+x^2-y^2=0 \\ x=0 \\ 1=\lambda 2y(2y^2-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^4-y^2=0 \\ x=0 \\ \lambda=\frac{1}{2y(2y^2-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm1 \quad [\text{Ecco il max/min.}] \\ x=0 \\ \lambda=\frac{1}{\pm2} \end{cases}$$

Esercizio 2.

$$\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \int\left(1+\frac{x^2+x}{x^3+1}\right)\mathrm{d}x = x+$$

$$\int\frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\,\mathrm{d}x = x+\int\frac{x}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = x+$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1} = x+\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1/2)^2+(3/4)} = x+\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+$$

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(2\frac{x-1/2}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = x+\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+$$

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(2\frac{x-1/2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = x+\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

Esercizio 3.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3(1+x^2)^3} = \int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^3(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^3(1+x^2)^2}+$$

$$-\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^3} = \int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^3(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x - \int\frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}x}{x^3(1+x^2)} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^2} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^2}+$$

$$\int\frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \int\frac{(1+x^2)-x^2}{x^3(1+x^2)}\,\mathrm{d}x - 2\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-2}}{-2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^3} - \int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}+$$

$$2\int\frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2x^2}+$$

$$-3\int\frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2x^2}+$$

$$-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + 3\int\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+x^2} =$$

$$-\frac{1}{2x^2} - 3\ln x + \frac{3}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2} + c.$$

Esercizio 4. *(i)*

$$\frac{\partial H}{\partial y} = (y-1+2x^2)+(y-2x^2) = 2y-1 = \dot{x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4x(y-1+2x^2)+(y-2x^2)4x = 4x(y-y-2x^2-2x^2+1)$$

$$= 4x(1-4x^2) = -[4x(1-4x^2)] = -\dot{y}$$

(ii) I punti di equilibrio (i punti per cui $\dot{x}=\dot{y}=0$) sono $(0,\frac{1}{2})$ e $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Dallo studio del sistema linearizzato $\begin{pmatrix} \frac{\partial\dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial\dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial\dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 48x^2-4 & 0 \end{pmatrix}$, abbiamo che i punti $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sono instabili (c'è un autovalore con parte reale positiva), mentre lo studio dei versi di percorrenza ci permette di concludere che anche $(0,\frac{1}{2})$ è instabile.

(iii) Ricordiamo che, essendo $H(x,y)$ una costante del moto, allora necessariamente le traiettorie del moto sono contenute nelle curve di livello di $H(x,y)$. Nel nostro caso, $H(1,2)=0$, quindi $\Gamma_0 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (y-2x^2)(y-1+2x^2)=0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=2x^2\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=1-2x^2\}$; in particolare vediamo che il punto iniziale si trova nella prima componente, quindi vale $y=2x^2$. Sostituendo nella prima equazione del sistema dinamico abbiamo

$$\frac{A}{2z-1}+\frac{B}{2z+1} = \frac{1}{4z^2-1} \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}, \dot{x}=4x^2-1 \Rightarrow$$

$$\int_0^t \frac{\dot{x}}{4x^2-1}\mathrm{d}t = t \Rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}x}{4z^2-1} = t \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\ln\frac{2z-1}{2z+1}\right]_1^{x(t)} = t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{2x(t)-1}{2x(t)+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = t \Rightarrow \ln\frac{2x(t)-1}{2x(t)+1} = \ln\frac{1}{3}+2t \Rightarrow$$

$$\frac{2x(t)-1}{2x(t)+1} = \frac{e^{2t}}{3} \Rightarrow 2x(t)-1 = \frac{2}{3}e^{2t}x(t)+\frac{e^{2t}}{3} \Rightarrow$$

$$x(t)[\frac{2}{3}e^{2t}-2] = -1-\frac{e^{2t}}{3} \Rightarrow x(t) = \frac{1+\frac{e^{2t}}{3}}{2-\frac{2}{3}e^{2t}} = \frac{3+e^{2t}}{6-2e^{2t}} \Rightarrow$$

$$y(t) = 2x(t)^2 = 2\left(\frac{3+e^{2t}}{6-2e^{2t}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3+e^{2t}}{3-e^{2t}}\right)^2.$$

Esercizio 5. *Per prima cosa scriviamo la conica in forma matriciale.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det(A) = -6 \neq 0$, *la conica è non degenere. Detta poi* A_0 *la sottomatrice* $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ *ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna abbiamo che* $\det(A_0) = 6 > 0$, *quindi la conica in questione è un ellisse. Per prima cosa, dobbiamo eliminare i termini misti:*

$$\det(A_0 - \lambda I_2) = \det\left(\begin{smallmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

$$E(1) = \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y \Rightarrow v_1 = (-2, 1);$$

$$E(6) = \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow v_2 = (1, 2).$$

Posto dunque $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right)$ *si ottiene*

$$2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' + x'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 6y'^2 = 0, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Per eliminare i termini di primo grado applichiamo la seguente traslazione

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{a'_{01}}{a'_{11}} \\ y'' = y' - \frac{a'_{02}}{a'_{22}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' + \frac{4}{6\sqrt{5}} \end{cases}$$

ottenendo così

$$-\frac{1}{3} + x''^2 + 6y''^2 = 0 \Rightarrow x''^2 + 6y''^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{x''}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right)^2 + \left(\frac{y''}{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\right)^2 = 1.$$

Esercizio 6. *(i) Chiamiamo A la matrice data che rappresenta f rispetto alle basi canoniche. Per calcolare il nucleo, basta risolvere il sistema lineare* $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(sistema omogeneo e non quadrato) ed è inoltre utile per il seguito scrivere una base di* $\mathrm{Ker} f$; *per quanto riguarda l'immagine, sia U il sottospazio tale che* $U \oplus \mathrm{Ker} f = \mathbb{R}^4$ *e sia* $\{v_i\}$ *una sua base (notare che la dimensione della base può cambiare in funzione del parametro t): allora* $\mathrm{Im} f$ *è il sottospazio generato dalle immagini dei* v_i *(anche la base dell'immagine ci tornerà utile in seguito).*

(ii) Usando il punto precedente, bisogna vedere se è possibile scrivere il vettore dato come combinazione lineare dei generatori del nucleo.

(iii) Dal primo punto è immediato.

(iv) Si imposta il sistema lineare $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e se ne trovano le soluzioni.*

Esercizio 7. *Per prima cosa, troviamo la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica: riscriviamo le tre condizioni su F sfruttandone la linearità*

$$F(e_2) + 2F(e_3) = (8, -2 + 2k, 16)$$
$$2F(e_1) - F(e_3) = (-1, -2 - 2k, -2)$$
$$F(e_1) + 3F(e_2) - F(e_3) = (4, -7 - k, 8).$$

I vettori $F(e_1), F(e_2)$ *e* $F(e_3)$ *sono le colonne di A. Per trovare base e nucleo si può procedere in modo del tutto analogo a quanto visto nell'esercizio precedente. Infine, una volta posto* $k = -3$, *bisogna verificare che per ogni autovalore di A la molteplicità geometrica (la dimensione dell'autospazio) coincida con quella algebrica (la molteplicità della radice del polinomio caratteristico); ricordiamo a tal proposito che per una matrice avere autovalori distinti è condizione sufficiente ma non necessaria per essere diagonalizzabile; detti* v_1, v_2, v_3 *i vettori della base diagonalizzante se poniamo* $Q^{-1} = ({}^t v_1, {}^t v_2, {}^t v_3)$ *si ha* $QAQ^{-1} = D$, *dove D è la matrice diagonale che ha gli autovalori di A sulla diagonale.*

Esercizio 8. *Esercizio sul procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt (vedi soluzioni PFB 01/07/03).*

Riferimenti bibliografici

[1] Enrico Giusti. *Analisi Matematica 2*. Bollati Boringhieri, 2003.