Tutorato 2 PFB - Soluzioni

Prima prova d'accesso a.a. 2008/2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

25 maggio 2009

ANALISI

Esercizio 1. Dato $\epsilon > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_{(-\infty,-(1+\epsilon))\cup((1+\epsilon),\infty)} |x|^n |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq (1+\epsilon)^n \int_{(-\infty,-(1+\epsilon))\cup((1+\epsilon),\infty)} |f(x)|\,\mathrm{d}x = c(1+\epsilon)^n \leq 1 \Rightarrow c = 0.$$

Poiché f è continua, se $\exists x_0 \in \mathbb{R}\backslash[1,1]$ t.c. $|f(x_0)| = t > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0$ t.c. $|f(x)| > \frac{t}{2}$ se $|x - x_0| < \delta$. Possiamo inoltre assumere che δ sia abbastanza piccolo e quindi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [-1,1] = \emptyset$. Per quanto visto, l'integrale di f fuori da $[-1,1]$ dovrebbe essere zero, ma

$$\int_{(-\infty,-1)\cup(1,\infty)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_{(x_0-\delta,x_0+\delta)} |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq (2\delta)\frac{t}{2} = \delta t > 0$$

contro quanto visto. Da cui se ne deduce che necessariamente $f(x) = 0$ se $|x| > 1$. Di più, poiché f è continua, $f(x) = 0$ se $|x| \geq 1$.

Esercizio 2. Essendo le f_n non negative, per ogni x si ha $0 \leq 1 - e^{-f_n(x)} \leq f_n(x)$. Integrando su $[0,1]$ si ottiene quindi

$$\int_0^1 [1 - \mathrm{e}^{-f_n(x)}]\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

da cui passando al limite

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 [1 - \mathrm{e}^{-f_n(x)}]\,\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Esercizio 3. (i) Analizziamo il comportamento dell'integrale negli estremi: in $x = 0$ la funzione x^α è integrabile se $\alpha > -1$; $0 \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{x^p \log x}{(x-1)x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{p-\alpha}\log x}{x-1}$ è finito sse $p - \alpha > 0$ e quindi sse $p > \alpha > -1$ cioé sse $p > -1$; dal criterio asintotico segue che la funzione è integrabile nell'orgine. Se invece $x \to 1$, la funzione tende a $\lim_{x\to 1} \frac{x^p \log x}{x-1} = 1 \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\log 1+(x-1)}{x-1} = 1$. Ne deduciamo la funzione ha integrale convergente in $[0,1]$.

(ii) Usiamo il cambio di variabile $t = \log x \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^t} \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{e}^t, \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} I_p - I_{p+1} &= \int_0^1 \left(\frac{x^p \log x}{x-1} - \frac{x^{p+1}\log x}{x-1}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1-x)x^p \log x}{x-1}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x^p \log x\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{pt} t \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 e^{(p+1)t} t\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p+1}\int_{-\infty}^0 (p+1)\mathrm{e}^{(p+1)t} t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{p+1}\mathrm{e}^{(p+1)t} t\Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{p+1}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{(p+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}\int_{-\infty}^0 (p+1)\mathrm{e}^{(p+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(p+1)^2}\mathrm{e}^{(p+1)t}\Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{(p+1)^2}. \end{aligned}$$

(iii) Dimostriamolo per induzione su m:

$$I_p - I_{p+m} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(p+k)^2}$$

se $m = 1$, segue dal punto precedente. Assumendo il risultato vero per m, dimostriamolo per $m + 1$

$$I_p - I_{p+m+1} = (I_p - I_{p+m}) + (I_{p+m} - I_{p+m+1}) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(p+k)^2} + \frac{1}{(p+m+1)^2} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(p+k)^2}.$$

(iv) Per dimostrare che f è continua, dobbiamo verificare che i valori agli estremi coincidano con i limiti della funzione stessa.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\log x}{x-1} = \lim_{x\to 0^+} x\log x \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1} = 0 \cdot -1 = 0, \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{x\log x}{x-1} = 1 \cdot \lim_{x\to 1^-}\frac{\log 1 + (x-1)}{x-1} = 1.$$

Per la crescenza, studiamo la derivata

$$\frac{((\log x)+1)(x-1) - (x\log x)1}{(x-1)^2} = \frac{x\log x + x - \log x - 1 - x\log x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - \log x}{(x-1)^2}.$$

Se $x \in (0,1)$ allora $\log x < x - 1$, quindi la derivata non si annulla mai. Poiché $0 = f(0) < f(1) = 1$ ed f è continua, ne segue che f è monotona crescente. Infine, dato $x \in (0,1)$, $0 \leq \frac{x\log x}{x-1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{p+m+1}\frac{x\log x}{x-1} \leq x^{p+m+1}$; per continuità, si può estendere la diseguaglianza anche agli estremi dell'intervallo e ottenere $0 \leq x^{p+m+1} f(x) \leq x^{p+m+1} \forall x \in [0,1]$.

(v) Notiamo che $\int_0^1 x^{p+m+1} \frac{x\log x}{x-1}\,dx = I_{p+m+1}$, da cui

$$I_{p+m} = \int_0^1 x^{p+m-1} \frac{x\log x}{x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{p+m}\log x}{x-1}\,dx \le \int_0^1 x^{p+m-1}\,dx = \frac{1}{p+m}.$$

Poiché $I_p = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(p+k)^2} + I_{p+m}$, mandando m a più infinito otteniamo che I_p è uguale alla serie (il resto tende a zero con m).

Esercizio 4. Per prima cosa riscriviamo l'integrale come

$$\int_0^1 \frac{|x-1|^\alpha |x+1|^\alpha}{|\log x|} \sinh(x)\,dx.$$

Studiamo il comportamento della funzione integranda negli estremi: in $x = 0$ va come $\frac{x}{\log x}$ (che tende a zero quale che sia α); in $x = 1$ si comporta come $\frac{|x-1|^\alpha}{|x-1|} = |x-1|^{\alpha-1}$, che è integrabile sse $\alpha - 1 > -1$ ovvero $\alpha > 0$. Quindi l'integrale converge sse $\alpha > 0$.

Esercizio 5. In $x = 2$ la funzione è integrabile senza problemi. Studiamo il comportamento a $+\infty$ al variare di α. Notiamo che il numeratore è sempre compreso tra 1 e 3; il denominatore invece va come $x^\alpha(\log x)^2$. Se $\alpha > 1$ allora la funzione è integrabile per il criterio asintotico applicato con $\frac{1}{x^\alpha}$; se $\alpha = 1$, allora vediamo il comportamento di $\frac{1}{x(\log x)^2}$:

$$0 < \int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^2} \overset{t=\log x}{=} \int_{\log 2}^\infty \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t}\Big|_{\log 2}^\infty = \frac{1}{\log 2} < \infty.$$

Infine, se $\alpha < 1$ l'integrale è divergente per confronto asintotico con $\frac{1}{x^\alpha}$.

GEOMETRIA

Esercizio 6. (i) Per determinare i valori per cui la matrice non ha rango pieno, basta calcolare il determinante di A e trovare i valori di h per cui esso si annulla.

$$\det A = -h\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h-1 & h-1 \end{vmatrix} + h\begin{vmatrix} 1 & h^2-h \\ h-1 & 0 \end{vmatrix} = -h^2(h-1)^2 = 0 \Rightarrow h = 0, 1.$$

(ii) Per $h = 1$ la matrice A diventa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed i suoi autovalori sono

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 0, 1.$$

Poiché gli autovalori di A sono tutti diversi, essa è diagonalizzabile.

Esercizio 7. Sia A la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Poiché il nucleo di f ha dimensione positiva, $\lambda = 0$ è autovalore di A e l'autospazio $E(0)$ associato è $\operatorname{Ker} f$; imponiamo che f sia t.c. $E(2)$ ha dimensione 2 e che quindi coincide con $\operatorname{Im} f$ (se è così allora f è l'endomorfismo cercato, unico per ipotesi). Determiniamo i coefficienti di A:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad E(0) = \{t(1,1,-1), t \in \mathbb{R}\}, \quad E(2) = \{t(0,1,-1) + s(1,0,2), s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Per trovare i coefficienti basta risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dal primo otteniamo $\begin{cases} a+b-c=0 \\ d+e-f=0 \\ g+h-i=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a+b \\ f = d+e \\ i = g+h \end{cases}$; dal secondo $\begin{cases} b-c=0 \\ e-f=2 \\ h-i=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c(= a+b \Rightarrow a = 0) \\ e = f+2(= d+e+2 \Rightarrow d = -2) \\ h = i-2(= g+h-2 \Rightarrow g = 2) \end{cases}$; e dal terzo $\begin{cases} a+2c=2 \\ d+2f=0 \\ g+2i=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = 2-a(= 2 \Rightarrow c = 1) \\ d = -2f(= -2 \Rightarrow f = 1) \\ 2i = 4-g(\Rightarrow i = 1) \end{cases}$, da cui sostituendo di nuovo nel secondo ricaviamo gli ultimi tre coefficienti $\begin{cases} b = c = 1 \\ e = f+2 = 3 \\ h = i-2 = -1 \end{cases}$. Ricapitolando:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9. 1. Ogni elemento di G scritto in forma polare vale $\rho e^{ik\frac{\pi}{2}}$, con $k = 0, 1, 2, 3$ e $\rho \in \mathbb{R}^+$, quindi il prodotto è ancora della stessa forma: $\rho' e^{ik'\frac{\pi}{2}} \rho' e^{ik'\frac{\pi}{2}} = \rho\rho' e^{i(k+k')\frac{\pi}{2}}$.

2. Basti pensare a quanto detto al punto precedente: si considera l'omomorfismo $(\rho, k) \mapsto \rho e^{ik\frac{\pi}{2}}$ da $(\mathbb{R}^+, \cdot) \times (\mathbb{Z}_4, +)$ in G e si applica il teorema fondamentale dell'omomorfismo tra gruppi.