PFB - Tutorato 2

Sessione Gennaio-Febbraio 2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

19 gennaio 2009

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 03/10/08, n. 1.1). *Dimostrare che esiste uno e uno solo $a \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{x^3 - ax^2 + x - a}\, dx$$

converge. Per questo $a \in \mathbb{R}$, calcolare l'integrale.

Esercizio 2 (PFB 03/10/08, n. 1.2). *Calcolare i due limiti seguenti*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt,$$
$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^{\infty} e^{-nx^2}\, dx.$$

Esercizio 3 (PFB 12/06/08, n. 1.4). *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{4+x^3}{x^2-1}\, dx.$$

Esercizio 4 (PFB 23/06/04, n. 1.2). *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{[\log(1+\sqrt{x})]^2}.$$

Esercizio 5 ([1, es. H pag. 8.80]). *Con opportune trasformazioni della funzione integranda, si calcolino i seguenti integrali indefiniti:*

1) $\int \frac{x+2}{x+1}\, dx$	*4)* $\int \frac{1-\tan^2 x}{\cos 2x}\, dx$
2) $\int \frac{2x-1}{x^2+1}\, dx$	*5)* $\int \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}\, dx$
3) $\int \frac{2x+1}{x+2}\, dx$	*6)* $\int \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$

GEOMETRIA

Esercizio 6 (PFB 03/10/08, n. 2.1). *Sia $\alpha := \sqrt{5+\sqrt{5}} \in \mathbb{C}$ e $m(X) \in \mathbb{Q}[X]$ il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.*

(i) *Determinare $m(X)$.*

(ii) *Calcolare il grado $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] := \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha)$ e determinare una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$.*

(iii) *Mostrare che $m(X)$ si spezza linearmente su $\mathbb{Q}(\alpha)$.*

Esercizio 7 (PFB 03/10/08, n. 2.2). *Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali, Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia

$$V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | AX = XA\}.$$

(i) *Si dimostri che V è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.*

(ii) *Si calcoli la dimensione di V.*

Esercizio 8 (PFB 12/06/08, n. 2.2). *Sia $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate 2×2 a coefficienti reali. Sia*

$$V = \{A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R}) | a_{11} = a_{22}, a_{21} = 0\}.$$

(i) *Si dimostri che V è un sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$.*

(ii) *Si esibisca un sottospazio U di $M_2(\mathbb{R})$ tale che $M_2(\mathbb{R}) = U \oplus V$*

(iii) *Si decomponga la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

come somma di una matrice $A_1 \in V$ e di una matrice $A_2 \in U$.

Esercizio 9 (PFB 12/06/08, n. 2.3). *Sia A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) *Trovare il valore $h \in \mathbb{R}$ per cui la matrice ammette l'autovalore 3.*

(ii) *Posto $h = -2$, dimostrare che A è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonalizzabile D e il cambiamento di base che la realizzi.*

Esercizio 10 ([2, n. 6 pag. 51]). *Esprimere ciascuna delle seguenti matrici quadrate ad elementi reali come prodotto di matrici elementari:*

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Riferimenti bibliografici

[1] V. Bacciarelli R. Iantorno. *Matematica per i trienni, vol. H.* Trevisini Editore, 2002.

[2] Edoardo Sernesi. *Geometria 1.* Bollati Boringhieri, 2000.