PFB - Tutorato 1 (Soluzioni)

Sessione Settembre-Ottobre 2008

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

25 settembre 2008

ANALISI

Esercizio 1. *L'esistenza di una soluzione dell'equazione segue dal Teorema di Lagrange, l'unicità dal fatto che l'integrando è sempre positivo e quindi la funzione integrale è iniettiva. Sempre dal Teorema di Lagrange, abbiamo che $x_a \in [0, a]$, da cui, per il celebre Teorema dei "carabinieri", $\lim_{a\to 0^+} x_a = 0$. Poi*

$$1 + x^{10} = \frac{a}{\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}} \Rightarrow x^{10} = \frac{a}{\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}} - 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+} \frac{x_a^{10}}{a^{10}} &= \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a^9 \int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}} - \frac{1}{a^{10}} = \lim_{a\to 0^+} \frac{a - \int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}}{a^{10}\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}}\\
&= \lim_{a\to 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+a^{10}}}{10a^9 \int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}} + a^{10}\frac{1}{1+a^{10}}}\\
&= \lim_{a\to 0^+} \frac{1 - (1 - a^{10} + O(a^{20}))}{a^{10}x_a + \frac{a^{10}}{1+a^{10}}}\\
&= \lim_{a\to 0^+} \frac{a^{10} + O(a^{20})}{a^{10}(x_a + \frac{1}{1+a^{10}})} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1 + O(a^{10})}{x_a + \frac{1}{1+a^{10}}} = 1
\end{aligned}$$

Quindi, per la continuità della funzione $(\cdot)^{10}$:

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{x_a}{a} = \left[\lim_{a\to 0+} \frac{x_a^{10}}{a^{10}}\right]^{\frac{1}{10}} = 1.$$

Esercizio 2. *1) La funzione f è continua sul compatto T, quindi per il Teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo su T.*

2) Usiamo i moltiplicatori di Lagrange. Posto $g(x, y, z) = x + y + z - 1$, imponiamo

$$\begin{cases} \nabla f - \lambda \nabla g = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

e cerchiamo le soluzioni per cui $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

In alternativa, dalla simmetria della funzione e del vincolo, si evince chiaramente che $P_x = P_y = P_z$, per cui dall'ultima equazione si ricava $P_x = P_y = P_z = \frac{1}{3}$. Osserviamo che $f(P) = 0$.

3) Studiamo f su T intersecata con il piano $z = 0$ e parametrizziamo il segmento individuato: $x = t, y = 1 - t, z = 0, t \in [0, 1]$. Poniamo $f(t) := f(x(t), y(t), z(t))$

$$f(t) = t^3 + (1 - t)^3 = t^3 + 1 - 3t + 3t^2 - t^3 = 3t^2 - 3t + 1,$$

$$f'(t) = 6t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Confrontando i valori di f dei punti trovati

$$f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \qquad f(1) = 1$$

vediamo che P è di minimo, mentre i punti di massimo sono i vertici di T (i caso $x = 0$ o $y = 0$ sono analoghi, di nuovo per simmetria).

4) Basta svolgere i calcoli:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 - 3(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z)\\
&= \lambda^3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = \lambda^3 f(x, y, z)
\end{aligned}$$

5) Se $x = y = z = 0$, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti sia $\lambda > 0$ t.c. $x + y + z = \frac{1}{\lambda}$. Allora $\lambda x + \lambda y + \lambda z = 1$, cioé $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in T$. Dunque

$$0 \leq f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^3 f(x, y, z) = \lambda^3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

e pertanto $0 \leq x^3+y^3+z^3-3xyz$, da cui $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$.

Esercizio 3. *Sia α l'angolo in A (espresso in radianti). Notiamo che il triangolo $\widehat{ABC}$ è un triangolo rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza. Il cateto AB è lungo $AC \cos\alpha = 2r\cos\alpha$.*

Detto O il centro del lago, l'angolo $\widehat{BOC}$ vale 2α (per un noto teorema delle scuole superiori: il triangolo $\widehat{AOB}$ è isoscele, avendo due lati uguali, e pertanto $\widehat{ABO} = \alpha$ e $\widehat{AOB} = \pi - 2\alpha$, da cui $\widehat{BOC} = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$) e dunque l'arco $\widehat{BC}$ vale $(2\alpha)r$.

Il tempo di percorrenza vale perciò $T(\alpha) = \frac{s_1(\alpha)}{v_1} + \frac{s_2(\alpha)}{v_2} = \frac{2r\cos\alpha}{2} + \frac{2\alpha r}{4} = r\cos\alpha + \frac{\alpha}{2}r$. $T'(\alpha) = -r\sin\alpha + \frac{1}{2}r = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Esercizio 4. *Ricordiamo che*

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \cosh x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Dato che $\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{k\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$, le serie convergono:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} \left[e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cos\frac{1}{n} + 1\right]\\
&= \sum_{n\geq 1} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) + 1 + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]\\
&= \sum_{n\geq 1} \left[3\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1} \left[e^{\frac{1}{n^2}} - 2\cosh\frac{1}{n} + 1\right]\\
&= \sum_{n\geq 1} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) + 1 + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]\\
&= \sum_{n\geq 1} \left[-\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right].
\end{aligned}$$

GEOMETRIA

Esercizio 5. • *Siano $a, b \in A$ qualsiasi:*

(1) $a+1 = (a+1)^2 = a^2+2a+1 = a+2a+1 \Rightarrow 2a = 0$.

(2) *Segue dal punto precedente.*

(3) $a+b = (a+b)^2 = a^2+ab+ba+b^2 = a+ab+ba+b \Rightarrow ab+ba = 0 \Rightarrow ab = -ba = ba \Rightarrow ab = a^2b = a(ab) = a(ba) = aba = (ab)a = (ba)a = ba^2 = ba$.

(4) *Un campo di 2 elementi, chiaramente è un anello booleano unitario integro. Viceversa, se ci fosse $a \neq 0, 1$, per il secondo punto sarebbe uno zerodivisore, quindi A non sarebbe integro.*

• *Si tratta di una semplice verifica: $\mathbb{Z}_2^X$ è dotato di uno zero (l'applicazione che manda tutto in $0 \in \mathbb{Z}_2$); di un elemento neutro rispetto al prodotto (la funzione identicamente uguale a $1 \in \mathbb{Z}_2$); ogni elemento ha come opposto sé stesso; il prodotto e la somma di elementi di $\mathbb{Z}_2^X$ stanno ancora in $\mathbb{Z}_2^X$ perché somma e prodotto sono definiti a partire da quelli in $\mathbb{Z}_2$ che è chiuso rispetto a somma e prodotto; infine è booleano perché $\mathbb{Z}_2$ lo è $((f)^2(x) = f(x)^2 = f(x))$.*

Esercizio 6. *1.* $\mathbf{l}_1 = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$.

2. $\mathbf{l}_2 = r\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

3. $A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} + 0 \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = |A||B| \cos\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \mathbf{l}_3 = \frac{\pi}{3}$.

4. $\mathbf{l}_2 < \mathbf{l}_1 < \mathbf{l}_3$.

Esercizio 7. *A e B distano entrambi $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dall'origine.*

$$|A| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$|B| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da $A \cdot B = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{\sqrt{8}}) = \frac{\sqrt{3}}{4} = r^2 \cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$ otteniamo che l'angolo tra A e B vale $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, da cui l'arco $\widehat{AB}$ è lungo $\alpha r = \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

Esercizio 8. *Consideriamo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{15}) = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ e i sottogruppi generati dai suoi elementi:*

·	1	2	4	7	8	11	13	14
1	1	2	4	7	8	11	13	14
2	2	4	8	14	1	7	11	13
4	4	8	1	13	2	14	7	11
7	7	14	13	4	11	2	1	8
8	8	1	2	11	4	13	14	7
11	11	7	14	2	13	1	8	4
13	13	11	7	1	14	8	4	2
14	14	13	11	8	7	4	2	1

$\langle 1 \rangle = \{1\}$, $\langle 2 \rangle = \{1, 2, 4, 8\}$,
$\langle 4 \rangle = \{1, 4\}$, $\langle 7 \rangle = \{1, 4, 7, 13\}$,
$\langle 8 \rangle = \{1, 2, 4, 8\}$, $\langle 11 \rangle = \{1, 11\}$,
$\langle 13 \rangle = \{1, 4, 7, 13\}$, $\langle 14 \rangle = \{1, 14\}$.

Per ragioni di cardinalità, G può essere solo prodotto diretto interno di un sottogruppo di 2 elementi e di uno di 4. Dalla tabella moltiplicativa, si vede che G è prodotto diretto interno di $\{1, 2, 4, 8\}$ e $\{1, 14\}$; oppure $\{1, 2, 4, 8\}$ e $\{1, 11\}$; oppure $\{1, 4, 7, 13\}$ e $\{1, 14\}$; oppure $\{1, 4, 7, 13\}$ e $\{1, 11\}$.