# Tutorato 1 PFB - Soluzioni

Prima prova d'accesso a.a. 2008/2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

18 maggio 2009

## ANALISI

**Esercizio 1.** 1. $\forall a \leq n \; : \; a^k \leq n^k \Rightarrow 1^k + \cdots + n^k \leq n^k + \cdots + n^k = n^{k+1} = O(n^{k+1})$; altrimenti notiamo che $\forall x \geq 0 \; : \; \lfloor x \rfloor^k \leq x^k \Rightarrow 1^k + \cdots + n^k = \int_0^{n+1} \lfloor x \rfloor^k \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{n+1} x^k \, \mathrm{d}x = \frac{(n+1)^{k+1}}{k+1} = O(n^{k+1})$.

2. Se $n = 0$ allora $0 = a \in \mathbb{Q}$. Sia $s_2(n) = 1^2 + \cdots + n^2$: $(n+1)^2 = s_2(n+1) - s_2(n) = b + c + d + 2cn + 3dn(1+n)$. Sostituendo nella precedente $n = 0, 1, 2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} n &= 0 & 1^2 &= b + c + d, \\ n &= 1 & 2^2 &= b + 3c + 7d, \\ n &= 2 & 3^2 &= b + 5d + 9d. \end{aligned}$$

Poiché il sistema lineare precedente ha matrice e termine noto a coefficienti in $\mathbb{Z}$, le sue soluzioni sono in $\mathbb{Q}$.

3. Sappiamo già che $a = 0$ (il primo coefficiente è nullo anche per $k > 2$). Risolvendo il sistema lineare:

$$b = \frac{1}{6}, \qquad c = \frac{1}{2}, \qquad d = \frac{1}{3}.$$

**Esercizio 2.** Poiché $A$ è simmetrica, è diagonalizzabile per il teorema di Lagrange; di più, per il teorema spettrale, essa ammette una base diagonalizzante *ortonormale* (quindi la relativa matrice del cambiamento di base è ortonormale): allora $D = QAQ^{-1}$ (con $D$ matrice diagonale), ovvero $A = Q^{-1}DQ$ da cui $x^tAx = (x^tQ^{-1})D(Qx) = (Qx)^tD(Qx)$.

Utilizziamo il cambiamento di coordinate $y = Qx$: $\mathrm{d}y = |\det Q|\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ perché essendo $Q$ ortonormale ha determinante $\pm 1$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-y^tDy} \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-\lambda_i y_i^2} \mathrm{d}y = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_i y_i^2} \, \mathrm{d}y_i \overset{\lambda_i y_i = t_i}{=} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t_i^2}}{\sqrt{\lambda_i}} \, \mathrm{d}t_i = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}.$$

Condizione necessaria e sufficiente perché l'integrale sia finito è che $\forall i \; : \; \lambda_i > 0$.

L'integrale $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ si ricava a partire da quello della densità di una variabile gaussiana

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{d}x \overset{\sqrt{2}t = x}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}t$$

o si considera $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ e si passa in coordinate polari

$$(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \Phi(\rho, \theta), \qquad \nabla \Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \qquad \det \nabla \Phi = \rho$$

$$\left( \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t \right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho \, \mathrm{d}\rho = 2\pi \left[ -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi.$$

**Esercizio 4.** La scomodità maggiore è nella forma della funzione integranda: essendo una quantità del tipo $\infty - \infty$ non è semplice verificare se va a zero, o se ci va con velocità sufficiente. Bisogna usare qualche manipolazione elementare tipo quelle che si vedono ad AM1a per risolvere certi limiti (niente di complicato):

$$\begin{aligned} & \left[ \sqrt{(x^2 + 2x + 2)} - (x+1) \right] \frac{\sqrt{(x^2 + 2x + 2)} + (x+1)}{\sqrt{(x^2 + 2x + 2)} + (x+1)} \\ &= \frac{(x+1)^2 + 1 - (x+1)^2}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + (x+1)} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 1} + (x+1)} \sim \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

A questo punto, per il criterio asintotico degli integrali, siamo in grado di concludere che l'integrale diverge

$$\int_0^{\infty} \left[ \sqrt{(x^2 + 2x + 2)} - (x+1) \right] \mathrm{d}x = +\infty.$$

**Esercizio 5.** Guardando questo esercizio possono venire in mente varie strategie, una più inutilmente complicata dell'altra. Spesso però gli strumenti più semplici sono i migliori

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(f(x)/g(x)) + \log g(x)}{\log g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log f(x)/g(x)}{\log g(x)} + \lim_{x\to 0} \frac{\log g(x)}{\log g(x)} = 0 + 1.$$

Si noti che la prima parte va a zero perché per ipotesi il numeratore tende a $\log c$, mentre il denominatore va a $-\infty$.

## GEOMETRIA

**Esercizio 6.** (a) Osserviamo intanto che i primi minori o uguali a sei sono $2, 3, 5$. Quindi il prodotto di due elementi $a_i, a_j$ di $M$ è del tipo $2^{p_i+p_j}3^{q_i+q_j}5^{r_i+r_j}$; notiamo che il prodotto è un quadrato se $2|p_i + p_j, 2|q_i + q_j, 2|r_i + r_j$. Se ci sono due elementi per cui $p_i \equiv p_j \pmod 2, q_i \equiv q_j \pmod 2, r_i \equiv r_j \pmod 2$, basta farne il prodotto e si trova un quadrato. D'altra parte è necessariamente così perché ci sono due modi per scegliere la parità di $p$, due per la parità di $q$ e due per la parità di $r$, quindi $2^3 = 8$ casi possibili (le *boxes* dell'enunicato del teorema) mentre noi abbiamo 9 elementi (gli *objects*), quindi c'è almeno una coppia di elementi con la stessa fattorizzazione (a meno di quadrati).

(b) Ci sono $2^{n+1} - 1$ insiemi non vuoti (*boxes*) e $2^n$ possibili fattorizzazioni, a meno di quadrati (*objects*). La conclusione allora segue dal teorema: c'è almeno un insieme la cui fattorizzazione ha tutti esponenti pari.

**Esercizio 7.**

**Lemma.** *Sia* $A \in GL_2(\mathbb{Z})$. *Allora* $\det(A) = \pm 1$.

*Dimostrazione.* La matrice inversa di $A$ è un elemento di $GL_2(\mathbb{Z})$, quindi il determinante (essendo somma algebrica di prodotti di interi) deve essere in $\mathbb{Z}$, ovvero $ad - bc$ deve essere invertibile, quindi vale $\pm 1$. □

Studiamo la matrice $A + xB$, dove $x \in \mathbb{R}$. Sappiamo che $\det(A + xB) = \pm 1$ per $x = 0, 1, 2, 3, 4$; d'altra parte $\det(A + xB)$ è un polinomio di grado al più due in $x$, quindi entrambe le equazioni $\det(A + xB) = 1$ e $\det(Ax + B)$ hanno al più due soluzioni ciascuna, a meno che $\det(A + xB)$ non sia costantemente uguale a 1 o $-1$. Quindi dobbiamo essere proprio in questo caso, visto che di matrici invertibili ne abbiamo cinque. Si noti che la matrice $B$ non è necessariamente la matrice nulla (anche se è necessariamente singolare - si consideri $A + xB$ e si imponga che il coefficiente di grado 2 sia zero). Basta prendere $A = I_2$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: l'inversa di $A + xB$ è $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

**Esercizio 9.** (i) Per esempio, notiamo che $W$ non contiene l'endomorfismo nullo; oppure che la somma di due elementi di $W$ non sta in $W$: $(0, 1, 0) = (f_1 + f_2)((1, 0, 1)) \neq (f_1)(1, 0, 1) + (f_2)(1, 0, 1) = (0, 1, 0) + (0, 1, 0) = (0, 2, 0)$.

(ii) Qui e nel seguito denotiamo con $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$:

$$f(e_1 + e_3) = e_2 = f(e_1) + f(e_3) \qquad\qquad f(e_1 + e_2) = e_1 + e_3 = f(e_1) + f(e_2)$$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= ae_1 + be_2 + ce_3 \\ f(e_2) &= e_1 + e_3 - f(e_1) = e_1(1 - a) + e_2(-b) + e_3(1 - c) \\ f(e_3) &= e_2 - f(e_1) = e_1(-a) + e_2(1 - b) + e_3(-c) \end{aligned}$$

Indicata quindi con $F_f$ la matrice che rappresenta $f$:

$$F_f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1-a & -b & 1-c \\ -a & 1-b & -c \end{pmatrix} \qquad \det F_f = a\begin{vmatrix} -b & 1-c \\ 1-b & -c \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1-a & 1-c \\ -a & -c \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} 1-a & -b \\ -a & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a(bc - 1 + b + c - bc) + b(c - ac - a + ac) + c(1 + ab - a - b - ab) \\ &= (-a + ab + ac) + (bc - ab) + (c - ac - bc) = c - a. \end{aligned}$$

(iii) Per quanto visto al punto precedente, $f$ è un isomorfismo sse $c - a \neq 0$ ovvero $a \neq c$.

(iv) Basta considerare il seguente sistema lineare

$$g((1, 1, 1)) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1-a & -b & 1-c \\ -a & 1-b & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che però non ha soluzione: ad esempio, sommando la prima riga con la terza si ottiene $2 = 0$.