PFB - Tutorato 1 (Soluzioni)

Sessione Gennaio-Febbraio 2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

12 gennaio 2009

ANALISI

Esercizio 1. *Ricordiamo che* $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_1^{\infty} e^{-kx}\,\mathrm{d}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{e^{-kx}}{k}\right]_1^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}}{k}.$$

Notiamo che possiamo scambiare serie e integrale perché, essendo la serie a termini positivi, essa è crescente e quindi sono soddisfatte le ipotesi del Teorema di convergenza monotona.

Esercizio 2. *Dato che* $\sin\frac{1}{x}$ *non ha limite per* $x \to 0^+$, *di fatto l'unica speranza è che, considerato che* $\sin\frac{1}{x}$ *è limitata in modulo, il limite della parte rimanente sia* 0.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + \frac{2\log\cos x}{x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \frac{\cancel{2}\sin x}{\cancel{2}x\cos x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \frac{\tan x}{x}}{\sqrt{x}}.$$

Poi, usando gli sviluppi di Taylor di $\sin x$ *e* $\cos x$ *e la serie geometrica, troviamo lo sviluppo di* $\frac{\tan x}{x}$:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + O(x^4), \qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-(1-\cos x)} = 1 + (1-\cos x) + O((1-\cos x)^2) = 1 + \frac{x^2}{2!} + O(x^4),$$

$$\frac{\sin x}{x\cos x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} = (1 + \frac{x^2}{2!} + O(x^4))(1 - \frac{x^2}{3!} + O(x^4)) = 1 + x^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + O(x^4) = 1 + \frac{x^2}{3} + O(x^4).$$

Concludendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - \frac{\tan x}{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x + O(x^2) - \left(1 + \frac{x^2}{3} + O(x^4)\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + O(x^2)}{\sqrt{x}} = 0.$$

Esercizio 3. *Poiché* $\nabla f = (-e^{-x^2}, e^{-y^2})$, *è evidente che* $f \in C^{\infty}(R^2)$. *Sia* C *la circonferenza di raggio* 1 *centrata nell'origine. Poiché il gradiente non si annulla mai, massimi e minimi possono trovarsi solo su* C *e non al suo interno. Notiamo inoltre che poiché* $f(x,y) = \int_x^y e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_y^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -f(y,x)$, *allora se* (x_0, y_0) *è punto di minimo vincolato per* f, *allora* (y_0, x_0) *è punto di massimo vincolato (*C *è simmetrica rispetto alla bisettrice, quindi* $(x_0, y_0) \in C \Leftrightarrow (y_0, x_0) \in C$*). Osserviamo che vale* $f(x,y) = -f(y,x)$, *il che significa che, detti* (x_M, y_M) *e* (x_m, y_m) *i punti rispettivamente di massimo e minimo di* f, *si ha* $f(x_M, y_M) = -f(y_m, x_m)$ *e* $f(x_m, y_m) = -f(y_M, x_M)$; *se ne deduce quindi che il massimo di* f *su* C *è uguale al minimo di* f *su* C *cambiato di segno. Usiamo ora i moltiplicatori di Lagrange: detta* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, *abbiamo il sistema*

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{cases}$$

Prima di risolvere il sistema, ricordiamo che la prima equazione non è perfettamente equivalente a $\nabla g(x,y) = \lambda \nabla f(x,y)$: *questo perché il gradiente di una curva regolare è sempre diverso da 0, mentre il gradiente di* f *potrebbe annullarsi nel caso in cui un punto critico vincolato coincida con un punto critico libero (anche se in questo caso abbiamo già escluso questa possibilità).*

$$\begin{cases} -e^{-x^2} &= 2\lambda x \\ e^{-y^2} &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Dato che dalla prima equazione $x \neq 0$ *e dalla seconda* $y \neq 0$, *moltiplichiamo la prima e la seconda equazione rispettivamente per* y *e per* x:

$$\begin{cases} -ye^{-x^2} &= 2\lambda xy \\ xe^{-y^2} &= 2\lambda xy \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \Rightarrow -ye^{-x^2} = xe^{-y^2} \Rightarrow xe^{x^2} = -ye^{y^2}.$$

Se $x = -y$ *allora l'equazione del vincolo ci dà* $2x^2 = 1$ *e quindi* $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Ci sono altre soluzioni? Consideriamo la funzione* $h(x) = xe^{x^2}$: *si ha* $h'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1+2x^2)e^{x^2} \neq 0$, *quindi* h *è iniettiva su tutto* $\mathbb{R}$ *(in particolare su* $[-1,1]$*). La* *funzione h è dispari, quindi se fosse $h(x) = -h(y)$ allora $h(x) = h(-y)$, dunque non ci sono altre soluzioni. Il punto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è di massimo e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è di minimo.*

Veniamo al limite: sia $c = \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t > 0$. Allora $f(0, y)$ tende a c se y tende a $+\infty$ e tende a $-c$ se y tende a $-\infty$, dunque non può esistere il limite di $f(x, y)$ per $|(x, y)| \to \infty$.

Esercizio 4. *Definizione di limite: dato $\epsilon > 0$ sia r_0 t.c. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 |(x, y)| \geq r_0 \Rightarrow 1 - \epsilon < f(x, y) < 1 + \epsilon$. Poiché $f(x, y)$ è continua, allora l'integrale di f su $B(0, r_0)$ è limitato (essendo f dotata di massimo e minimo sulla chiusura di $B(0, r)$). Quindi*

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 0 + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} (1-\epsilon)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} (1+\epsilon)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2}(1-\epsilon)\pi(r^2 - r_0^2) \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2}(1+\epsilon)\pi(r^2 - r_0^2) \\ 1 - \epsilon \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)\setminus B(0,r_0)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 1 + \epsilon\end{gathered}$$

Poiché ϵ è arbitrario, segue la conclusione. Il viceversa è falso, esibiamo un controesempio:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq e^{-y^2} \\ \frac{2(x - e^{-y^2})}{-e^{-y^2}} & e^{-y^2} < x \leq 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

In pratica, la funzione vale sempre 2 sul semipiano delle x positive e varia linearmente da 0 a 2 su un intervallo delle x che si stringe sempre più al crescere in modulo di y e vale 0 altrove. In tal modo, fuori da una circonferenza abbastanza grande, la funzione vale 2 su un semipiano e 0 sull'altro semipiano salvo un'area arbitrariamente piccola. Notiamo che in tal caso non esiste $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x, y)$, come ci si sarebbe dovuti aspettare: se infatti il limite fosse esistito e valesse c allora necessariamente, per quanto detto nella prima parte, la media integrale avrebbe avuto come limite c e non 1.

GEOMETRIA

Esercizio 5. *i. Il polinomio $p(X)$ si fattorizza in $(X + 1)(X^2 + 1)$. L'ideale generato da $p(X)$, quindi, non è primo perché il prodotto di $X + 1$ e $X^2 + X$ è conenuto in $(p(X))$, ma l'ideale non contiene nessuno dei due fattori. Quindi $\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(p(X))}$ non è un dominio di integrità.*

ii. Per semplicità di notazione poniamo $t = X + (p(X))$ e scriviamo gli elementi di A come $\{at^2 + bt + c | a, b, c \in \mathbb{Z}_2\}$. Poiché il prodotto tra elementi di A è commutativo, basta calcolare solo metà tabella. Inoltre sappiamo che $(t+1)\cdot(t^2+t) = 0+(p(X))$, da cui $(t + 1)(t^2 + t + 1) = (t + 1)(t^2 + 1) + (t + 1)t = (t^2 + t)$ e $(t^2 + t)(t^2 + 1) = t(t + 1)(t^2 + 1) = t0 = 0$. Per calcolare il prodotto tra due polinomi di secondo grado, bisogna considerare che $t^2t^2 = t^4 = t(t^3) = t(t^2 + t + 1) = t^3 + t^2 + t = 1$.

$\cdot$	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	t	$t+1$	t^2	t^2+1	t^2+t	t^2+t+1
t	0	t	t^2	t^2+t	t^2+t+1	t^2+1	$t+1$	1
$t+1$	0	$t+1$	t^2+t	t^2+1	$t+1$	0	t^2+1	t^2+t
t^2	0	t^2	t^2+t+1	$t+1$	1	t^2+1	t^2+t	t
t^2+1	0	t^2+1	t^2+1	0	t^2+1	0	0	t^2+1
t^2+t	0	t^2+t	$t+1$	t^2+1	t^2+t	0	t^2+1	t^2+1
t^2+t+1	0	t^2+t+1	1	t^2+t	t	t^2+1	t^2+1	t^2

Esercizio 6. *i) Mettiamo in riga i vettori e osserviamo che la matrice che si ottiene cancellando la prima colonna ha determinante $4 \neq 0$. Infatti, la matrice è triangolare superiore, quindi basta fare il prodotto degli elementi sulla diagonale per avere il determinante (lo stesso si sarebbe ottenuto sviluppando il determinante per riga e calcolando ricorsivamente i vari minori, che però sono quasi tutti nulli).*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) Non esiste alcun endomorfismo che soddisfi le condizioni assegnate: $(2, 2, 1, 1) = f(v_1 + v_2 + v_3) \neq f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = 3v_1 + v_3 = (2, 6, 0, 5)$.

Esercizio 7. *a) Siano* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ *e* $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$. $\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$; $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(BA)$.

b) Dal primo punto: $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0 \neq \mathrm{tr}(I) = n$.

c) Dal primo punto: $\mathrm{tr}(ACA^{-1}) = \mathrm{tr}((AA^{-1})C) = \mathrm{tr}(IC) = \mathrm{tr}(C)$.

Esercizio 8. *a) Calcoliamo l'inversa della matrice del sistema* $Ax = b$*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 12 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ \det(A) = \begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 12 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8,$$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -12 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 5 & 1 & 12 \end{pmatrix},\ {}^t\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & 5 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -12 & 2 & 12 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{cof}(A)}{\det(A)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema è $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Come prima:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 3 & -2i \end{pmatrix},\ \det(A) = 5,$$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -2i & -3 \\ 1 & i \end{pmatrix},\ {}^t\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -3 & i \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{cof}(A)}{\det(A)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}i & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{i}{5} \end{pmatrix}.$$

La soluzione è $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

c) In modo del tutto analogo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\frac{\sqrt{2}}{2} & \end{pmatrix},\ \det(A) = 1\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1,$$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ {}^t\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{{}^t\mathrm{cof}(A)}{\det(A)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La soluzione è $x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.