PFB - Tutorato 1

SESSIONE GENNAIO-FEBBRAIO 2009

Tutore: Dott. Giulio Pellitta

12 gennaio 2009

ANALISI

Esercizio 1 (PFB 12/06/08, n. 1.1)**.** *Utilizzando le proprietà della serie geometria, dimostrare che*

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{n}.$$

Esercizio 2 (PFB 20/02/03, n. 1.1)**.** *Dire se la funzione*

$$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x} \left(e^x + \frac{2 \log \cos x}{x^2} \right)}{\sqrt{x}}$$

ammette limite per $x \to 0^+$.

Esercizio 3 (PFB 20/02/03, n. 1.4)**.** *Si consideri la funzione*

$$f(x) = \int_x^y e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Dimostrare che è di classe C^∞ *su* $\mathbb{R}^2$. *Si studino gli eventuali massimi e minimi di* f *nel cerchio unità* $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Dire se esiste*

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x, y).$$

Esercizio 4 (PFB 01/10/03, n. 1.5)**.** *Sia* $f : R^2 \to R$ *una funzione continua. Dimostrare che se*

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = 1$$

allora

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1$$

dove

$$B(0, r) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

È vero anche il viceversa?

GEOMETRIA

Esercizio 5. *Dato il polinomio* $p(X) = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$, *si consideri l'anello* $A = \frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(p(X))}$.

i. *Determinare se* A *è un dominio di integrità.*

ii. *Scrivere la tabella moltiplicativa di* A.

Esercizio 6. *In* $\mathbb{R}^4$ *sono dati i vettori* $v_1 = (1, 2, 0, 1), v_2 = (1, 0, 1, 0), v_3 = (-1, 0, 0, 2)$.

i) *Verificare che* v_1, v_2, v_3 *sono linearmente indipendenti.*

ii) *Dire se esiste un endomorfismo* f *di* $\mathbb{R}^4$ *tale che:*

$$\begin{aligned}
&f(v_1) = v_1,\\
&f(v_2) = 2v_1 + v_2\\
&f(v_3) = -v_2 + v_3,\\
&f(v_1 + v_2 + v_3) = (2, 2, 1, 1),\\
&f(v_1 + 3v_2 + v_3) = (2, 6, 0, 1).
\end{aligned}$$

Esercizio 7. *Date* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

a) *Provare che* $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B), \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

b) *Dedurre che* $AB - BA \neq I$.

c) *Provare che se* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *allora* $\mathrm{tr}(ACA^{-1}) = \mathrm{tr}(C)$ *per ogni* $C \in M_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 8 ([1, n. 5 pag. 50])**.** *Risolvere i sistemi seguenti con il metodo dell'inversa:*

a) $(K = \mathbb{Q})$
$$\begin{array}{ccccccc}
X & + & Y & - & \frac{Z}{2} & = & 1\\
 & & 12Y & - & Z & = & 12\\
X & + & 3Y & & & = & 3
\end{array}$$

b) $(K = \mathbb{C})$
$$\begin{array}{ccccc}
iX & - & Y & = & 2i\\
3X & - & 2iY & = & 1
\end{array}$$

c) $(K = \mathbb{R})$
$$\begin{array}{ccccccc}
X & & & + & Z & = & \sqrt{2}\\
X & + & \sqrt{2}Y & + & \frac{1}{2}Z & = & 2\sqrt{2}\\
\frac{\sqrt{2}}{2}X & + & 2Y & + & \frac{\sqrt{2}}{2}Z & = & 3.
\end{array}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.