Esercizi per la prova di accesso alla laurea magistrale(gruppo analitico)

Andrea Cova

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{log|x|}$. Se ne trovi il dominio, si dimostri che si puó estendere per continuitá ad una funzione definita su tutto $\mathbf{R}$ e se ne studi brevemente il grafico.

Svolgimento 1. Analizziamo qualitativamente l'andamento della funzione considerata $f(x) = \frac{x^2-1}{log|x|}$: si osserva immediatamente che il dominio (o insieme di definizione) della funzione assegnata $f(x)$ è rappresentato dall'intero asse reale $\mathbf{R}$ privato unicamente dell'origine (in cui la funzione $log|x|$ non risulta neppure essere definita) e dei punti di ascissa unitaria $x = \pm 1$ (in cui il denominatore della funzione razionale in esame si annullerebbe), ovvero in definitiva dall'insieme $D = \mathbf{R} - \{0, -1, 1\} = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0, -1, 1\}$; tale funzione gode di una particolare proprietá di simmetria: si tratta difatti di una funzione pari, dal momento che si ha $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D$. Questa funzione non presenta alcuna intersezione con gli assi coordinati e risulta essere continua in tutto il proprio insieme di definizione, fatta eccezione per i tre unici punti di discontinuità posizionati in corrispondenza di $x = 0$ ed $x = \pm 1$; dimostreremo ora agevolmente che peró tale funzione $f(x)$ si puó estendere per continuitá ad una funzione $\overline{f}$ definita sull'intero asse reale $\mathbf{R}$. Nel punto $x = 0$, é possibile porre per definizione $\overline{f}(x) = 0$ ed allora la funzione ottenuta in questo modo risulterá continua in tale punto, dal momento che $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{log|x|} = \frac{-1}{-\infty} = 0$. Nei punti $x = \pm 1$, sará analogamente necessario individuare il valore del limite $\lim_{x\to\pm 1} f(x) = \lim_{x\to\pm 1} \frac{x^2-1}{log|x|}$ (forma indeterminata del tipo $0/0$). Osserviamo peró che, poiché entrambe le funzioni $x^2 - 1$ e $log|x|$ risultano essere infinitesime nei punti $x = \pm 1$, é allora possibile applicare il teorema di L'Hopital allo scopo di rimuovere l'indeterminatezza appena evidenziata ed (eseguendo la derivata simultaneamente del numeratore e del denominatore) si otterrá che $\lim_{x\to\pm 1} f(x) = \lim_{x\to\pm 1} \frac{x^2-1}{log|x|} = \lim_{x\to\pm 1} \frac{(x^2-1)'}{(log|x|)'} =$
$= \lim_{x\to\pm 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm 1} 2x^2 = 2$, cosicché sará possibile porre per definizione

$\overline{f}(x) = 2$. Di conseguenza osserviamo che la funzione $\overline{f}(x) =$

$$\begin{cases} f(x) \quad per\ x \in D = \mathbf{R} - \{0, -1, 1\} \\ 0 \quad per\ x = 0 \\ 2 \quad per\ x = \pm 1 \end{cases}$$

rappresenta la richiesta estensione per continuitá della funzione $f(x)$ inizialmente assegnata ad una funzione definita sull'intero asse reale $\mathbf{R}$. Si puó inoltre constatare che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{log|x|} = +\infty$ e conseguentemente la funzione in esame divergerá all'infinito per $x \to \pm\infty$; osserviamo a questo punto che $f'(x) = \frac{2xlog|x| - \frac{1}{x}(x^2-1)}{(log|x|)^2}$ e pertanto ne scaturisce che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$ oppure $x_2 = 1$. Risulta inoltre che $f'(x) = \frac{2xlog|x| - \frac{1}{x}(x^2-1)}{(log|x|)^2} > 0 \Leftrightarrow x > x_3 = 0$ (si osservi peró che in questi tre punti $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ed $x_3 = 0$ neppure la funzione derivata prima risulta essere definita e quindi la funzione considerata non ammetterá alcun punto di stazionarietá)$\longmapsto$ ne scaturisce pertanto in definitiva che la funzione $f(x)$ assegnata risulta essere strettamente crescente per $x \in (0, +\infty)$, mentre risulta essere strettamente decrescente per $x \in (-\infty, 0)$. Infine possiamo anche agevolmente ricavare talune informazioni concernenti il segno della funzione in esame: si avrá difatti evidentemente che $f(x) = \frac{x^2-1}{log|x|} > 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ (dal momento che, per quanto concerne il numeratore, si ha che $(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 = -1$ oppure $x > x_2 = 1$, ed analogamente, per quanto riguarda invece il denominatore, si ha che $(log|x|) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 = -1$ oppure $x > x_2 = 1$) $\longmapsto$ la funzione risulta sempre positiva e quindi é interamente contenuta nel primo e secondo quadrante. Alla luce delle informazioni sinora ricavate, sarebbe possibile finalmente a questo punto tracciare un grafico qualitativo della funzione sulla quale stiamo concentrando la nostra attenzione.

Esercizio 2. Calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin(x)} - cos(\sqrt{x})}{[log(1+\sqrt{x})]^2}$.

Svolgimento 2. Osserviamo che tale limite particolarmente complesso puó essere invece risolto abbastanza agevolmente ricorrendo agli sviluppi asintotici in formula di Taylor delle funzioni in esso coinvolte; in particolare utilizzeremo i seguenti sviluppi di Taylor centrati nell'origine e con il resto espresso nella forma di Peano:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
- $sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$.

Avremo pertanto in definitiva che:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin(x)} - cos(\sqrt{x})}{[log(1+\sqrt{x})]^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\frac{1}{2}sin(x)+\frac{1}{8}sin^2(x)-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{720}}{\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{x}}{3}\right)^2} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+\frac{x^3}{720}}{x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-x\sqrt{x}+\frac{2x^2}{3}-\frac{x^2\sqrt{x}}{3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(1+\frac{x}{12}-\frac{59x^2}{720}\right)}{x\left(1-\sqrt{x}+\frac{11}{12}x-\frac{x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{9}\right)} = 1.$

Esercizio 3. Calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}dx$.

Svolgimento 3. $\int \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+1}dx = \int \frac{x^3+1}{x^3+1}dx + \int \frac{x^2+x}{x^3+1}dx =$
[effettuando la scomposizione $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1), x^2+x = x(x+1)$, con c_1 = costante di integrazione derivante dalla risoluzione del primo integrale]
$= x+c_1+\int \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = x+c_1+\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = x+c_1+\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+$
$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} =$
[si osservi che sussiste l'uguaglianza $x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2 + (1-\frac{(-1)^2}{4}) =$
$= (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$, con c_2 = costante di integrazione derivante dalla quadratura del primo integrale]
$= x + c_1 + \frac{1}{2}log(x^2-x+1) + c_2 + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$
[effettuando la sostituzione $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt, t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}) = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$]
$= x + \frac{1}{2}log(x^2-x+1) + c_1 + c_2 + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}} = x + \frac{1}{2}log(x^2-x+1) + c_1 +$
$+ c_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$
[con c_3 = costante di integrazione derivante dalla risoluzione dell'ultimo integrale indefinito]
$= x + \frac{1}{2}log(x^2-x+1) + c_1 + c_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(t) + c_3 =$
[ponendo $c_1+c_2+c_3 = c$ (costante complessiva di integrazione)]
$= x + \frac{1}{2}log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c.$

Esercizio 4. Si consideri l'insieme di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da
$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}$. Calcolare $\int\int\int_S x^2 dxdydz$, spiegando accuratamente tutti i passaggi.

Svolgimento 4. Analogamente alle formule di cambiamento di variabili comunemente utilizzate nella risoluzione degli integrali doppi, rammentiamo

che se $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ costituisce un'applicazione di classe $C^1(B)$ e biunivoca da un insieme B dello spazio u,v,w alla sua immagine A dello spazio x,y,z e se il determinante Jacobiano $det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ non si annulla, allora vale la formula di cambiamento di variabili individuata da:
$\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_B f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw.$
Di particolare importanza (ed infatti le utilizzeremo esplicitamente nella risoluzione dell'integrale triplo in esame) sono le trasformazioni in coordinate polari (o coordinate sferiche):

$$\begin{cases} x = \rho sin\varphi cos\vartheta \\ y = \rho sin\varphi sin\vartheta \\ z = \rho cos\varphi \end{cases}$$

con $det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\vartheta)} = \rho^2 sin\varphi$. Osserviamo anzitutto che il dominio di integrazione sul quale stiamo concentrando la nostra attenzione puó essere agevolmente espresso in termini delle coordinate sferiche appena introdotte nella seguente maniera, $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\} =$

$= \left\{(\rho,\vartheta,\varphi) \in \mathbf{R}^3 : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$
Avremo conseguentemente che $\int\int\int_S x^2dxdydz = \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 sin^2\varphi cos^2\vartheta d\vartheta =$

$= \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\vartheta d\vartheta =$
[utilizzando le seguenti formule di riduzione derivanti dall'applicazione ripetuta della regola di integrazione per parti:
$\int sin^n xdx = -\frac{sin^{n-1}xcosx}{n} + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}xdx,$
$\int cos^n xdx = \frac{cos^{n-1}xsinx}{n} + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}xdx]$
$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R \left(\left[-\frac{sin\varphi cos\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right)\left(\left[\frac{cos\varphi sin\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\right) = \frac{R^3}{3}\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4} =$
$= \frac{\pi^2}{48}R^3.$

Esercizio 5. Dimostrare che $x^x \geq sinx, \forall x \geq 0$.

Svolgimento 5. Osserviamo anzitutto che risulta $x^x = e^{xlogx}$ e chiaramente, dal momento che la funzione x^x é sempre positiva per $x \geq 0$ (semipiano che si sta prendendo in considerazione), non sará necessario prestare alcun interesse alle regioni dove si ha $sinx < 0$, poiché la tesi che ci proponiamo di dimostrare risulterá per esse banalmente verificata. Individuiamo ora il limite della funzione $x^x = e^{xlogx}$ per x tendente a zero: $\lim_{x\to 0^+} x^x =$
$= \lim_{x\to 0^+} e^{xlogx} = e^0 = 1$ (sfruttando i limiti notevoli $\lim_{x\to 0^+} x^b logx =$
$= 0$(per $b > 0$),$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$(per $a > 0$)). Si puó allora constatare che

questo é il medesimo valore che viene assunto dalla funzione in corrispondenza del punto $x = 1$.
Conseguentemente, in virtú del teorema di Rolle, trattandosi di una funzione continua nell'intervallo $[0, 1]$, derivabile in $(0, 1)$ e tale da assumere esattamente lo stesso valore agli estremi $x = 0$ ed $x = 1$, esisterá allora un opportuno punto $x_0 \in (0, 1)$ per cui risulti essere nulla la derivata della funzione (punto stazionario che nella situazione in esame sará in realtá un punto di minimo). Determiniamo esplicitamente la posizione di tale punto stazionario:
$(x^x)' = (e^{xlogx})' = (xlogx)'e^{xlogx} = (logx + 1)e^{xlogx} = 0 \Leftrightarrow logx = -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$,
$(x^x)' = (logx + 1)e^{xlogx} > 0 \Leftrightarrow logx + 1 > 0 \Leftrightarrow logx > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e} \longmapsto$
$\longmapsto x_0 = \frac{1}{e}$ rappresenta effettivamente un punto di minimo.
Dalla figura a lato si deduce immediatamente che, per $0 \leq x \leq 1$, vale la disuguaglianza $sinx \leq x$; ci proponiamo a questo punto allora di dimostrare che $x^x = e^{xlogx} \geq x(\geq sinx)$, per ogni $0 \leq x \leq 1$. La pendenza della funzione $x^x = e^{xlogx}$ in corrispondenza del punto $x = 1$ é rappresentata da $(x^x)'(1) = ((logx+1)e^{xlogx})(1) = 1$. Mostriamo ora che tale pendenza risulta essere massima proprio nel punto $x = 1$: con questa finalitá studiamo pertanto la funzione pendenza $f'(x) = (logx+1)e^{xlogx}$ all'interno dell'intervallo $[0, 1]$ e calcoliamone in particolare la derivata prima
$f''(x) = [(logx + 1)e^{xlogx}]' = \frac{1}{x}e^{xlogx} + (logx + 1)^2e^{xlogx} = (log^2x + 2logx +$
$+ 1 + \frac{1}{x})e^{xlogx} > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ e quindi effettivamente il massimo della funzione pendenza viene assunto nell'estremo $x = 1$.
Alla luce di quanto sinora asserito possiamo pertanto concludere che risulta $x^x = e^{xlogx} \geq x$, per ogni $0 \leq x \leq 1$, il che completa esaurientemente la dimostrazione della disuguaglianza sulla quale stiamo concentrando la nostra attenzione.

Esercizio 6. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni $\sum_{n\geq 0} 2^n sin\frac{x}{3^n}$.

Svolgimento 6. Rammentiamo preliminarmente le piú rilevanti nozioni concernenti le diverse definizioni di convergenza per le serie di funzioni (convergenza puntuale, convergenza assoluta e convergenza uniforme). Se f_n é una successione di funzioni reali definite nell'insieme I dell'asse reale $\mathbf{R}$, indichiamo con s_n la successione delle somme parziali $s_1 = f_1, s_2 = f_1 +$
$+ f_2, ..., s_n = f_1 + f_2 + ...f_n, ...$Tale successione di funzioni s_n si chiama $serie(di\ funzioni)$ di termine generale f_n e si indica anche con l'espressione $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + ... + f_n + ...$
Se per ogni $x \in I$ la serie numerica di termine generale $f_n(x)$, rappresentata da $f_1(x) + f_2(x) + ...f_n(x) + ...$, é convergente , cioé se la successione

$s_n(x)$ converge (ammette limite finito) per ogni $x \in I$, allora si dice che la serie di funzioni in esame *converge puntualmente* in I. Se la successione di funzioni s_n converge uniformemente in I (si asserisce consuetamente che una successione di funzioni f_k converge uniformemente nell'insieme di numeri reali I verso f se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un opportuno $\nu_\epsilon \in \mathbf{N}$ tale che $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall k > \nu_\epsilon, \forall x \in I$), allora si dice che la serie di funzioni considerata *converge uniformemente* in I. Infine, in maniera del tutto analoga a quanto si effettua per le serie numeriche, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + ... + f_n + ...$ si dice *assolutamente convergente* in I se la serie di termine generale $|f_n|$ converge puntualmente in I.
Prendiamo a questo punto in considerazione la serie di funzioni $\sum_{n\geq 0} 2^n sin\frac{x}{3^n}$ assegnata nell'esercizio.
Al crescere dell'indice n, osserviamo agevolmente che la funzione $\frac{x}{3^n}$ tende a valori infinitesimi, indipendentemente da quanto grande possa essere il numeratore x. Allorché $\frac{x}{3^n}$ tende a zero, il valore della funzione $sin\frac{x}{3^n}$ si avvicina sempre maggiormente a quello assunto dalla funzione $\frac{x}{3^n}$. Di conseguenza i termini della serie che stiamo prendendo in considerazione presenteranno esattamente il medesimo andamento della funzione $(\frac{2}{3})^n x$ e quest'ultima evidentemente converge dal momento che si puó banalmente constatare che $\sum_{n\geq 0}(\frac{2}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ (trattandosi di una serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$) $\longmapsto$ per la serie di funzioni in esame risulta verificata la proprietá di convergenza puntuale.
Osserviamo inoltre a questo punto anche che la serie $\sum_{n\geq 0} 2^n sin\frac{x}{3^n}$ deve convergere assolutamente per le medesime motivazioni appena esposte. D'altro canto peró tale serie di funzioni non gode invece della proprietá di convergenza uniforme. Questo accade dal momento che, indipendentemente da quanto grande possa diventare l'indice n, sará sempre possibile individuare un opportuno parametro reale x tale che risulti essere maggiore di $2\pi \cdot 3^n$ (ovvero $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R}$ tale che sia $x > 2\pi \cdot 3^n$). Pertanto qualunque valore di epsilon si prenda in considerazione per ogni x, allorché si venga ad avere $x >> 2\pi \cdot 3^n$, si potrá constatare che le somme parziali contemplate sino almeno all'indice n saltelleranno avanti e indietro all'interno dell'intervallo compreso tra gli estremi -2^n e 2^n. Questo significa allora che, per quanto concerne tali somme parziali, non risulterá essere verificata la condizione che dovrebbe essere soddisfatta per ciascuno dei termini della serie, per i valori di x sufficientemente grandi da avere $x >> 2\pi \cdot 3^n \longmapsto$ la serie di funzioni in esame non gode della proprietá di convergenza uniforme sull'intero asse reale.

Esercizio 7. Stabilire per quali valori del parametro reale α esiste finito l'integrale improprio: $\int_0^1 \frac{|x^2-1|^\alpha}{|logx|} sinh(x)dx$.

Svolgimento 7. Osserviamo anzitutto che é necessario prestare attenzione unicamente agli estremi del dominio di integrazione, dal momento che la funzione integranda risulta essere definita ed assume valore finito in corrispondenza di tutti i punti compresi all'interno di tale intervallo.
Per $x = 0$, si potrá constatare che $sinh(0) = 0$ ed inoltre la funzione $|logx|$ tende ad assumere valori infiniti; dal momento che l'infinito risulta posizionato al denominatore della funzione considerata , il limite di tale funzione integranda per x tendente a zero risulterá chiaramente essere nullo, cosicché non bisognerá preoccuparsi per quanto concerne l'estremo inferiore del dominio di integrazione. Passiamo pertanto a prendere in esame l'altro estremo di integrazione.
In corrispondenza dell'estremo superiore $x = 1$, si avrá che $sinh(1) =$
$= 1,1752...$, che evidentemente rappresenta un valore finito e non nullo; pertanto tale fattore della funzione integranda non produrrá alcun effetto sul fatto che il limite esista oppure no, mentre i termini rimanenti saranno costituiti da $\frac{|x^2-1|^\alpha}{|logx|} = \frac{(1-x^2)^\alpha}{-logx} = \frac{(x^2-1)^\alpha}{logx} =: g(x)$ (dove si é potuto rimuovere i valori assoluti presenti al numeratore ed al denominatore, rammentando che si sta supponendo $x \in [0, 1]$).
[osserviamo che a rigore si dovrebbe porre $\frac{(1-x^2)^\alpha}{-logx} = \pm\frac{(x^2-1)^\alpha}{logx}$, ma possiamo trascurare l'ambiguitá di segno derivante dall'essere il parametro α incognito, poiché questa non influisce sulla convergenza dell'integrale improprio]
Si avrá allora che $g(x) = \frac{(x^2-1)^\alpha}{logx} = \frac{(x-1)^\alpha(x+1)^\alpha}{logx} =$
[effettuando la sostituzione $x = 1 + t$]
$= \frac{t^\alpha(2+t)^\alpha}{log(1+t)} \cong$
[per $x \to 1$, si ha che $t \to 0$ e possiamo quindi considerare gli sviluppi asintotici in formula di Taylor]
$\cong \frac{t^\alpha(2+t)^\alpha}{t} = \frac{(2+t)^\alpha}{t^{1-\alpha}}$, funzione che dal punto di vista dell'integrabilitá presenta sostanzialmente il medesimo andamento della funzione $h(t) = \frac{1}{t^{1-\alpha}}$. Si potrá pertanto in definitiva concludere che: $\int_0^1 \frac{|x^2-1|^\alpha}{|logx|} sinh(x)dx < +\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow 1 - \alpha > -1 \Leftrightarrow \alpha < 2 \longmapsto$ l'integrale improprio considerato converge esclusivamente per valori del parametro reale α tali che si abbia $\alpha < 2$.

Esercizio 8. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ rappresentata da
$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
1)Dimostrare che f vincolata a $T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ ammette massimi e minimi.
2)Dimostrare che f ammette un unico punto critico all'interno della superficie T (lo denoteremo con P).
3)Studiare f vincolata a $T \cap \{(x, y, z) : z = 0\}$ e dimostrare che P é il punto di minimo assoluto di f, mentre i punti di massimo stanno sull'intersezione

di T con i piani coordinati.
4)Dimostrare che $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^3 f(x, y, z)$.
5)Usando i punti (3) e (4), dimostrare che, se $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, allora $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$.

Svolgimento 8. **1**)Si sta prendendo in considerazione un funzionale da studiare su di una varietá con bordo (individuata dall'insieme T, che rappresenta la faccia esterna della piramide a base triangolare posizionata nel primo ottante del sistema di riferimento cartesiano, ed il cui bordo sará allora costituito dai tre segmenti delimitanti tale superficie triangolare); dal momento che questa varietá risulta essere un insieme compatto, si puó immediatamente asserire che la funzione continua considerata ammette necessariamente massimi e minimi al suo interno, in virtú del teorema di Weierstrass.
2)Ricerchiamo eventuali punti critici della funzione f in esame, che siano presenti all'interno della superficie T e con tale finalitá applichiamo il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*.
Si definisce la funzione $H(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(x + y + z - 1) =$
$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - \lambda(x + y + z - 1)$ e si impongono le condizioni di annullamento simultaneo delle sue derivate parziali, riconducendoci pertanto a studiare il sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite x, y, z, λ individuato da:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz - \lambda = 0 \\ 3y^2 - 3xz - \lambda = 0 \\ 3z^2 - 3xy - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$\mapsto 3x^2 - 3yz = \lambda = 3y^2 - 3xz \Rightarrow 3(x^2 - y^2) - 3z(y - x) = 0 \Rightarrow 3(x +$
$+ y)(x - y) + 3z(x - y) = 0 \Rightarrow 3(x - y)(x + y + z) = 0 \Rightarrow 3(x - y) = 0$ e di conseguenza si avrá che $y = x$. Potremo pertanto in effetti constatare che: $y = x \Rightarrow z = 1 - 2x \Rightarrow 3x^2 - 3x(1 - 2x) - \lambda = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x + 6x^2 - \lambda =$
$= 0 \Rightarrow 9x^2 - 3x - \lambda = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+36\lambda}}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{6}$.

- $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{6} \Rightarrow z_1 = 1 - 2\frac{1-\sqrt{1+4\lambda}}{6} = \frac{2+\sqrt{1+4\lambda}}{3}$ ed inoltre $3x_1^2 -$
$- 3x_1 z_1 - \lambda = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1+1+4\lambda-2\sqrt{1+4\lambda}}{36} - 3 \cdot \frac{2+\sqrt{1+4\lambda}-2\sqrt{1+4\lambda}-1-4\lambda}{18} - \lambda =$
$= 0 \Rightarrow \frac{2+4\lambda-2\sqrt{1+4\lambda}-2+2\sqrt{1+4\lambda}-8\lambda}{12} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 =$
$= 0, z_1 = 1 \longmapsto (0, 0, 1)$

- $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{6} \Rightarrow z_2 = 1 - 2\frac{1+\sqrt{1+4\lambda}}{6} = \frac{2-\sqrt{1+4\lambda}}{3}$ ed inoltre $3x_2^2 -$
$- 3x_2 z_2 - \lambda = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1+1+4\lambda+2\sqrt{1+4\lambda}}{36} - 3 \cdot \frac{2-\sqrt{1+4\lambda}+2\sqrt{1+4\lambda}-1-4\lambda}{18} - \lambda =$
$= 0 \Rightarrow \frac{2+4\lambda+2\sqrt{1+4\lambda}-2-2\sqrt{1+4\lambda}+8\lambda}{12} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow x_2 = y_2 =$
$= \frac{1}{3}, z_2 = \frac{1}{3} \longmapsto (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Si puó conseguentemente concludere che il punto $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ rappresenta l'unico punto critico della funzione $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ all'interno della superficie triangolare T che stiamo prendendo in considerazione.
3)A priori non é possibile stabilire se il punto critico individuato nell'ambito del punto precedente costituisce un massimo, un minimo, oppure un punto di sella. Per determinare la natura di tale punto critico sará allora necessario studiare i valori assunti dalla funzione sul bordo del dominio triangolare T e, con questo scopo specifico, per simmetria potremo concentrare la nostra attenzione esclusivamente sul suo lato inferiore, ovvero in definitiva sull'insieme $T \cap \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = 0\}$.
Nella regione in esame, definita dalle equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

si avrá che $y = 1 - x$ e la restrizione della funzione f considerata a tale segmento sará pertanto rappresentata dalla seguente funzione di una sola variabile reale:
$g(x) := f(x, 1-x, 0) = x^3 + (1-x)^3 = x^3 + 1 - x^3 - 3x + 3x^2 = 3x^2 - 3x + 1$ e dunque si ha immediatamente che $g'(x) = 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
Osserviamo allora che $g(\frac{1}{2}) = 3 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1}{4}$ e, poiché stiamo prendendo in esame la funzione $g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ e risulta che $g(0) = g(1) = 1 > \frac{1}{4} = g(\frac{1}{2})$, potremo concludere che i punti di massimo della funzione f in esame sul bordo del dominio T saranno posizionati, per ovvie ragioni di simmetria, in corrispondenza dei tre vertici di tale superficie triangolare, ovvero nei punti $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 1)$. Inoltre si puó agevolmente constatare che $f(P) = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$, il che ci permette di asserire che l'unico punto critico P posto all'interno della superficie triangolare T rappresenta il punto di minimo assoluto della funzione f, mentre i suoi punti di massimo giacciono sull'intersezione di T con i piani coordinati, in corrispondenza dei tre vertici P_1,P_2 e P_3 precedentemente individuati.
4)É immediato osservare che: $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 - 3(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 + \lambda^3 z^3 - 3\lambda^3 xyz = \lambda^3(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = \lambda^3 f(x, y, z)$.
5)Se, come si é dimostrato in precedenza, $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ costituisce il punto di minimo assoluto della funzione f e risulta che $f(P) = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$, allora $f(Q) \geq f(P) = 0 \ \forall Q$ e di conseguenza $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ per ogni $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Esercizio 9. Sia $a \in \mathbf{R}$, con $a > 0$. Dimostrare che l'equazione $\frac{1}{1+x^{10}} = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}$ ha un'unica soluzione positiva, x_a. Dimostrare che $x_a \in [0, a]$ e

calcolare i limiti $\lim_{a\to 0^+} x_a$ e $\lim_{a\to 0^+}(\frac{x_a}{a})$.

Svolgimento 9. Prendiamo in considerazione la funzione $f : x \to \frac{1}{1+x^{10}}$ ed osserviamo che si tratta di una funzione continua (come composizione di applicazioni continue) e monotona decrescente nell'intervallo $[0, a]$ che stiamo prendendo in considerazione (in quanto $f'(x) = -\frac{10x^9}{(1+x^{10})^2} \leq 0$, per ogni $x \geq 0$). Ma allora, essendo inoltre f una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[0, a]$, é possibile applicare il primo teorema della media e conseguentemente asserire che sussistono le seguenti disuguaglianze $f(a) \leq \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}} \leq f(0)$ (difatti tale integrale risulta essere compreso tra il minimo ed il massimo della funzione integranda nell'intervallo $[0, a]$, ma avendo constatato che questa funzione é ivi monotona decrescente ne scaturisce immediatamente che i suoi valori minimo e massimo saranno assunti rispettivamente in corrispondenza degli estremi destro e sinistro del dominio di integrazione considerato).
Si avrá dunque che $f(a) = \frac{1}{1+a^{10}} \leq \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}} =: A \leq 1 = f(0)$, ovvero $f(a) \leq A \leq f(0)$, ed allora, applicando il teorema del valore intermedio, si potrá effettivamente concludere che $\exists x_a \in [0, a]$ tale che si abbia $f(x_a) = \frac{1}{1+x_a^{10}} = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}$ ed il fatto che questa sia l'unica soluzione positiva dell'equazione $\frac{1}{1+x^{10}} = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}$ discende subito dalla proprietá di monotona decrescenza della funzione integranda.
Si puó banalmente constatare che, essendo $x_a \in [0, a]$, allora risulta che $\lim_{a\to 0^+} x_a = 0$. Allo scopo di calcolare invece l'altro limite $\lim_{a\to 0^+}(\frac{x_a}{a})$, osserviamo preliminarmente che:
$f(x_a) = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}} \cong$
[eseguendo uno sviluppo asintotico del binomio ottenibile mediante la formula di Taylor]
$\cong \frac{1}{a}\int_0^a (1 - t^{10})dt = \frac{1}{a}[t - \frac{t^{11}}{11}]_0^a = 1 - \frac{a^{10}}{11}$ e pertanto si potrá constatare che $f(x_a) \cong 1 - \frac{a^{10}}{11}$ e d'altra parte $f(x_a) = \frac{1}{1+x_a^{10}} \cong 1 - x_a^{10}$.
Dunque in definitiva si avrá che $1 - x_a^{10} \cong 1 - \frac{a^{10}}{11} \Rightarrow x_a^{10} \cong \frac{a^{10}}{11} \Rightarrow x_a \cong \frac{a}{\sqrt[10]{11}}$.
Alla luce di quanto sinora constatato, saremo conseguentemente in grado di concludere che $\lim_{a\to 0^+} \frac{x_a}{a} = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a}(\frac{a}{\sqrt[10]{11}}) = \frac{1}{\sqrt[10]{11}}$.

Esercizio 10. Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $\frac{2+sin\frac{1}{x^2}}{(x^\alpha+1)(logx)^2}$ é integrabile su $[2, +\infty]$?

Svolgimento 10. Osserviamo anzitutto che é necessario prestare attenzione unicamente al comportamento dell'integrale improprio all'infinito, dal momento che la funzione integranda risulta essere definita ed assume valore finito in corrispondenza di tutti i punti compresi all'interno dell'intervallo rappresentativo del dominio di integrazione.

Chiaramente il numeratore della funzione integranda non comporta alcun problema ai fini della convergenza dell'integrale improprio e si puó immediatamente constatare che le seguenti funzioni presentano il medesimo andamento asintotico all'infinito: $\frac{2+sin\frac{1}{x^2}}{(x^\alpha+1)(logx)^2} \cong \frac{1}{x^\alpha(logx)^2}$.
Osserviamo a questo punto che, al tendere della variabile x a valori infiniti, risulta che $(logx)^n > \frac{1}{x}$ per tutti gli interi positivi n: ci si puó agevolmente rendere conto di questo tramite l'applicazione ripetuta del teorema di L'Hopital alla funzione $\frac{(logx)^n}{x}$, e si potrá allora dedurne che quest'ultima converge sempre a zero allorché x tende all'infinito, indipendentemente da quanto grande possa diventare l'indice n.
Rammentando inoltre le proprietà di convergenza dei seguenti integrali impropri $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(logx)^\beta} < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1$, potremo immediatamente concludere, per quanto concerne l'integrabilitá della funzione assegnata sull'intervallo $[2, +\infty]$, che si ha: $\int_2^{+\infty} \frac{2+sin\frac{1}{x^2}}{(x^\alpha+1)(logx)^2} dx < +\infty \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(logx)^2} < +\infty \Leftrightarrow \alpha \geq 1$.

Esercizio 11. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dimostrare che, se $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 1$, allora $\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)} f(x,y)dxdy = 1$, dove si sia posto $B(0,r) = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$.

Svolgimento 11. Al crescere del raggio r (ossia in definitiva al suo divergere verso valori infiniti), la funzione $f(x,y)$ tende ad assumere valori prossimi all'unitá e quindi la tesi che ci proponiamo di dimostrare risulta essere sostanzialmente equivalente all'ipotesi che si sta considerando. In corrispondenza di un fissato r, l'integrale calcolato tra gli estremi r ed $r + dr$ é rappresentato dalla funzione integrata attorno ad un cerchio di raggio r volte dr. Osserviamo che la componente dell'integrale compresa tra r ed $r + dr$ é individuata da $2\pi r dr$. Pertanto, per r grande, ci aspettiamo che l'integrale si comporterá come $2\pi\frac{r^2}{2}$ dal momento che in effetti stiamo integrando qualcosa che si avvicina sempre maggiormente a $2\pi r dr$, allorché il raggio r tende all'infinito. Si puó constatare agevolmente che:
$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)} f(x,y)dxdy =$
[poiché $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = 1$]
$= \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi r dr = \frac{2\pi}{\pi r^2} \int_0^r r dr = \frac{2}{r^2}[\frac{r^2}{2}]_0^r = 1 (= \frac{1}{\pi r^2} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B(0,r)} dxdy)$.