PROVA FINALE DI TIPO B e PROVA D'ACCESSO ALLA LAUREA SPECIALISTICA

23-6-2004

Il candidato, nel risolvere i problemi seguenti, tenga conto che:

a) la sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi (analisi e geometria) e con un totale di almeno 51;

b) il punteggio massimo è 100;

c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (Punti 15)

Dimostrare che

$$x^x \geq \sin x \qquad \forall x \geq 0.$$

1.2 (Punti 15)

Calcolare

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos\sqrt{x}}{[\log(1+\sqrt{x})]^2}.$$

1.3 (Punti 15)

Sia $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. Dimostrare che l'equazione

$$\frac{1}{1+x^{10}} = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{10}}$$

ha un'unica soluzione positiva, x_a. Dimostrare che $x_a \in [0, a]$. Calcolare i limiti

$$\lim_{a\to 0+} x_a \qquad\qquad \lim_{a\to 0+} \frac{x_a}{a}.$$

1.4 (Punti 15)

Si consideri il sistema di equazioni differenziali nel piano

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \end{cases}$$

dove

$$H = H(x,y) = y\,(y - f(x))\,,$$

con

$$f(x) = x\prod_{n=1}^{N}\left(x^2 - a_n^2\right), \qquad 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N.$$

(i) Verificare che la funzione $H(x, y)$ è una costante del moto.
(ii) Dimostrare che il sistema ammette $2N$ punti d'equilibrio stabile e $2N + 1$ punti d'equilibrio instabile.
(iii) Dimostrare che ogni traiettoria con dato iniziale della forma $(\bar{x}, 0)$, con $\bar{x}$ che non sia uno zero di $f(x)$, è asintotica a uno dei punti d'equilibrio instabile.

1.5 (Punti 25)

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{2 + \sin \frac{1}{x^2}}{(x^\alpha + 1)(\log x)^2}$$

è integrabile su $[2, +\infty]$?

1.6 (Punti 25) **Dissertazione teorica**

Il teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (Punti 15)

Sia K un campo e $\mathbf{V}$ un K-spazio vettoriale. Un operatore lineare $F : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}$ si dice *nilpotente* se esiste un intero positivo k tale che F^k è l'operatore nullo.

Sia $T \in$End$(\mathbf{V})$ un operatore nilpotente; si ponga $\mathbf{W}^l =$Im (T^l) con l intero positivo.

1. Provare che se $\mathbf{W}^l \neq \mathbf{0}$, allora dim $(\mathbf{W}^{l+1}) <$ dim $(\mathbf{W}^l)$.
2. Provare che se $\mathbf{V}$ è di dimensione finita n, allora $T^n = 0$.

2.2 (Punti 15)

1. Provare che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, allora A e la sua trasposta ${}^tA$ hanno gli stessi autovalori.
2. Dare un esempio di matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tale che A e ${}^tA$ non hanno gli stessi autovettori.
3. Sia $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Stabilire la relazione che intercorre tra gli autovalori di A e quelli di A^{-1}.

2.3 (Punti 15)

Nello spazio euclideo $\mathbf{E^3}$, dotato di un riferimento cartesiano $O\mathbf{ijk}$, sono date le due rette sghembe di equazioni cartesiane:

$$\mathbf{r}_1 : X = 0, \;\; Y - 2Z - 3 = 0 \qquad e \qquad \mathbf{r}_2 : X - Y - 1 = 0, \;\; Z - 1 = 0.$$

1. Scrivere equazioni cartesiane della retta $\mathbf{s}$ perpendicolare comune a $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.

2. Calcolare la distanza tra $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$.

3. Sia $P = \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{s}$. Determinare una equazione cartesiana del piano α passante per P, parallelo a $\mathbf{r}_2$ e perpendicolare al piano $\beta : X + 2Y - 3Z + 1 = 0$.

2.4 (Punti 15)

In $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$, dotato di un riferimento proiettivo $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, è data la conica

$$\mathcal{C} \quad : \quad X_0X_1 - X_0X_2 - X_1X_2 + X_2^2 = 0.$$

1. Verificare che $\mathcal{C}$ è semplicemente degenere e determinare equazioni cartesiane delle rette $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ in cui $\mathcal{C}$ si decompone.

2. Sia $P_0 = \mathbf{r} \cap \mathbf{s}$ e siano P_1 e P_2 i punti in cui $\mathcal{C}$ è intersecata dalla retta $\mathbf{t} : X_1 + X_2 = 0$. Determinare equazioni della proiettività f di $\mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_i) = P_i$ per $i = 0, 1, 2$ e $f([1, 1, 0]) = [1, 1, 2]$.

2.5 (Punti 25)

Sia $\mathcal{C}([0, 1])$ l'anello delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $[0, 1]$. Sia $T \subseteq [0, 1]$ e si ponga

$$I(T) := \{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \quad | \quad f(y) = 0 \quad \forall y \in T\}\,.$$

Se $x \in [0, 1]$, si ponga $M_x := I(\{x\})$.

1. Provare che $I(T)$ è un ideale di $\mathcal{C}([0, 1])$.

2. Provare che M_x è un ideale massimale di $\mathcal{C}([0, 1])$ e determinare, a meno di un isomorfismo, $\mathcal{C}([0, 1])/M_x$.

3. Se $S \subseteq \mathcal{C}([0, 1])$, si ponga

   $$V(S) := \{x \in [0, 1] \quad | \quad f(x) = 0 \quad \forall f \in S\}\,.$$

   Provare che $V(S)$ è un sottoinsieme chiuso di $[0, 1]$.

4. Provare che se J è un ideale <u>proprio</u> di $\mathcal{C}([0, 1])$, cioè $J \subset \mathcal{C}([0, 1])$, allora $V(J)$ è non vuoto.

5. Provare che ogni ideale massimale M di $\mathcal{C}([0, 1])$ è del tipo M_x per qualche $x \in [0, 1]$.

2.6 (Punti 25) **Dissertazione teorica**

Diagonalizzazione di operatori simmetrici.