Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laura Magistrale

Dip. Matematica - Università Roma Tre

Prof. U. Bessi, S. Gabelli, G. Gentile, M. Pontecorvo

3 Ottobre 2006

Istruzioni.
a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti;
b) il punteggio massimo è 100;
c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti;
d) scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare - usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi;
NON PARLARE pena il ritiro del compito.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (15 punti.) Calcolare i limiti seguenti.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{n-2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^3-1}{n^2+1}} \qquad \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\sqrt{1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}\right).$$

1.2 (15 punti.) Sia $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=c.$$

Si dimostri che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c.$$

1.3 (15 punti.) Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione di numeri reali tali che:

1) $a_n\geq 0$.

2) $a_{n+m}\leq a_n+a_m \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}$.

Dimostrare che:

a) $a_{kn+j}\leq ka_n+a_j \qquad \forall k,n,j$.

b) $\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{kn+j}}{kn+j}\leq\frac{a_n}{n} \qquad \forall n,j$.

c) $\lim_{s\to+\infty}\frac{a_s}{s}\leq\inf\frac{a_n}{n}$.

d) $\lim_{s\to+\infty}\frac{a_s}{s}=\inf\frac{a_n}{n}$.

Il quesito a) vale 3 punti, b), c) e d) ne valgono 4.

1.4 (15 punti.)

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\dot{x} = A\,x + \alpha\,g(x),$$

dove A è una matrice antisimmetrica (non nulla), $\alpha \in \mathbf{R}$ è un parametro e $g(x) = (0, f(x))$, con $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^1.

(i) Per $\alpha = 0$ dimostrare che le traiettorie descrivono moti circolari uniformi, e calcolarne la velocità angolare in funzione dei parametri della matrice A.

(ii) Per $\alpha \neq 0$ e A fissata, dare delle condizioni sul parametro α e sulla funzione f perché tutte le traiettorie siano limitate. Quali condizioni devono invece soddisfare α e f perché le soluzioni siano definite globalmente nel tempo?

(iii) Si consideri in particolare il caso

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

e siano A e α tali che le condizioni del punto (ii) sui moti siano soddisfatte. Si descriva qualitativamente la dinamica del sistema nel piano al variare dei parametri (compatibilmente con le condizioni richieste).

[*Suggerimento:* Le condizioni sulla funzione f si possono esprimere più convenientemente in termini di una sua primitiva.]

1.5 (25 punti.)

Si studi l'integrabilità e si calcoli l'integrale della funzione

$$f(x,y) = \frac{|y|}{\sqrt{x}(1+x^2)}$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \quad : \quad y^4 \leq 4x, \quad x \leq 4y^4\}.$$

1.6 (25 punti.) Dissertazione teorica. Si enuncino i teoremi della funzione implicita e dei moltiplicatori di Lagrange. Si applichino questi due teoremi allo studio dell'insieme seguente.

$$\Gamma = \{(x,y,z) \quad : \quad z = x^2 + y^2, \quad x + y + z = 0\}.$$

In particolare

1) si dimostri che, nell'intorno di ogni punto di Γ, ci sono due coordinate che si possono esplicitare in termini della terza.

2) Si trovi la retta tangente in ogni punto.

3) Si trovino i punti di massimo e di minimo di $f(x, y, z) = z$ su Γ.

Enunciare i teoremi vale 4 punti, 1), 2) e 3) valgono 7 punti ciascuno.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (15 punti.)

Considerare lo spazio vettoriale $\mathcal{M}$ delle matrici reali quadrate di ordine n. Mostrare che le matrici simmetriche $\mathcal{S} := \{M \in \mathcal{M} : M =^t M\}$ e le matrici antisimmetriche $\mathcal{A} := \{M \in \mathcal{M} : M = -^tM\}$ formano due sotospazi lineari di $\mathcal{M}$ e che $\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

2.2 (15 punti.)

Dimostrare che un'applicazione tra spazi vettoriali $T : V \to W$ è un'applicazione lineare se e solo se il suo grafico

$$\Gamma = \{(v, T(v) \in V \times W : v \in V\}$$

è un sottospazio lineare del prodotto $V \times W$.

2.3 (15 punti.)

Mostrare che i punti $A = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ e $B = (\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ giacciono su una stessa circonferenza centrata nell'origine dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Calcolare la lunghezza dell'arco AB...

2.4 (15 punti.)

L'insieme delle matrici simmetriche invertibili di ordine n forma un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne?

2.5 (25 punti.)

Il *prodotto misto* di tre vettori in $\mathbb{R}^3$...

2.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.

Il gruppo ortogonale speciale $SO(2)$.