Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laura Magistrale

Dip. Matematica - Università Roma Tre

Prof. U. Bessi, S. Gabelli, G. Gentile, M. Pontecorvo

1 febbraio 2006

Istruzioni.
a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 20 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi e con un totale di almeno 51 punti;
b) il punteggio massimo è 100;
c) la scelta dei problemi da svolgere è libera, ma ne possono essere svolti al più 5 da 15 punti;
d) scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare - <u>usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi</u>;
NON PARLARE pena il ritiro del compito.

Gruppo 1 (analisi)

1.1 (15 punti.)

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3n^2}}{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}.$$

1.2 (15 punti.)

Si consideri il polinomio

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - 10x + 100.$$

1) Dimostrare che, se n è pari, allora P ha almeno una radice reale.

2) Studiare il segno della derivata di P e il limite di P a $+\infty$ e a $-\infty$, se n è pari.

3) Studiare il segno della derivata di P e il limite di P a $+\infty$ e a $-\infty$, se n è dispari.

4) Dimostrare che

$$10^{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{-n}{n+1} + 100 \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

5) Dimostrare che P non ha zeri se n è dispari, e ha un solo zero se n è pari.

1.3 (15 punti.)

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F(y)G(x), \end{cases}$$

dove F e G sono due funzioni di classe C^1 e $F > 0$.

(i) Dimostrare che il sistema si può interpretare come un sistema meccanico unidimensionale con massa dipendente dalla velocità.

(ii) Dimostrare che in generale il sistema non è un sistema hamiltoniano, ovvero che non esiste alcuna funzione $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\dot{x} = \partial H/\partial y$ e $\dot{y} = -\partial H/\partial x$. È possibile che in qualche caso sia hamiltoniano?

(iii) Dimostrare che la funzione

$$K(x,y) = \int_0^y \frac{y'}{F(y')}\,\mathrm{d}y' - \int_0^x G(x')\,\mathrm{d}x'$$

è una costante del moto.

(iv) Calcolare esplicitamente $K(x,y)$ nel caso $G(x) = -4x - 4x^3$ e $F(y) = 1/(4+4y^2)$. Dimostrare che tutte le traiettorie del sistema sono limitate, e caratterizzare l'insieme dei dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche.

(v) Sotto le ipotesi del punto (iv) determinare analiticamente le orbite nel piano (x,y) come funzioni $x \to y(x)$. Discutere qualitativamente il moto.

1.4 (15 punti.)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \log(x+1) - \log(x-1) - \frac{2}{x}.$$

Determinare a, b, c, d in modo tale che, per $x \to +\infty$, sia abbia

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3} + o(\frac{1}{x^3}).$$

Determinare se esiste finito

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

prestando particolare attenzione al comportamento in 1 e all'infinito. Se l'integrale esiste, calcolarlo.

1.5 (25 punti.)

Si consideri la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$ e sia $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1) Si mostri che se

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y) - g(x,y)| < +\infty$$

allora g ammette almeno un punto dove il gradiente si annulla.

2) Si mostri che se

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y) - g(x,y)| < \frac{1}{2}$$

allora g ammette almeno due punti in cui il gradiente si annulla.

1.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.

Il teorema delle contrazioni e le sue applicazioni.

Gruppo 2 (geometria)

2.1 (15 punti.)

Trovare tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste una matrice quadrata reale M tale che

$$\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 8 \end{pmatrix}$$

2.2 (15 punti.)

Siano α_n, β_n i numeri interi definiti da $(3+4i)^n = \alpha_n + \beta_n i$, per $n \geq 1$.

Dimostrare, per induzione su n, che risulta $\alpha_n \equiv 3(mod 5)$ e $\beta_n \equiv 4(mod 5)$, per ogni $n \geq 1$.

Stabilire inoltre se $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ è una radice m-sima dell'unità per qualche $m \geq 1$.

2.3 (15 punti.)

Sia $L : V \to V$ un endomorfismo lineare dello spazio vettoriale V e supponiamo che $v \in V$ sia tale che

$L^m v = 0$ ma $L^{m-1} v \neq 0$, per qualche $m \in \mathbb{N}$.

Mostrare che $v, Lv, \ldots, L^{m-1}v$ sono linearmente indipendenti.

2.4 (15 punti.)

Sia $(,) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale V e sia W un suo sottospazio lineare. Consideriamo il sottospazio ortogonale $W^\perp = \{v \in V \mid (v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W\}$. Dimostrare che:

(i) $W \subset (W^\perp)^\perp$

(ii) $W^\perp = [(W^\perp)^\perp]^\perp$

L'inclusione del punto (i) è sempre stretta? Dimostrare o dare un controesempio.

2.5 (25 punti.)

Sia $\mathbb{R}^2$ il piano Euclideo dotato del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$ e sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un operatore simmetrico (o autoaggiunto) - cioè T è lineare e $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^2$. Sia $S^1 = \{v\mathbb{R}^2 \mid \langle v, v\rangle = 1\}$ il cerchio unitario e cosideriamo la funzione

$$\begin{array}{rccc} \hat{T}: & S^1 & \to & \mathbb{R} \\ & v & \mapsto & \langle Tv, \rangle \end{array}$$

la restrizione a S^1 della forma quadratica associata a T. Mostrare che il massimo e minimo di $\hat{T}$ son gli autovalori di T.

2.6 (25 punti.)

Enunciare e dimostrare il teorema spettrale per gli spazi vettoriali reali.

Prova Finale di Tipo B e Prova di Accesso alla Laurea Magistrale

1 febbraio 2006

Soluzioni degli esercizi del Gruppo 1 (analisi)

1.1 (15 punti.)

Studiamo separatamente il limite del numeratore N e del denominatore D:

$$\lim_{n\to+\infty} N(n) = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3n^2}\right] = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} D(n;\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha < 0 \\ \log 2, & \text{se } \alpha = 0 \\ 0, & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Dunque per $\alpha \leq 0$ il limite esiste ed è uguale a 0.
Per $\alpha > 0$ si ottiene una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, che puó essere trattata sviluppando sotto forma di polinomi di Taylor in un intorno di $x = 0$ le funzioni $f(x) = f\left(\frac{1}{n}\right)$ che compaiono nelle espressioni di N e D (infatti $n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0^+$).
Dagli sviluppi di Taylor
$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$ e
$\log(1+x) = x + o(x)$,
otteniamo dunque

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{9n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

e

$$\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)=\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Per $\alpha>0$ si ha allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-1-\frac{1}{3n^2}}{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{9n^4}-1-\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{9}\frac{n^\alpha}{n^4}=\begin{cases}0, & \text{se } \alpha<4\\ -\infty, & \text{se } \alpha>4\\ -\frac{1}{9}, & \text{se } \alpha=4.\end{cases}$$

1.2 (15 punti.)

1) Se n è pari, allora P è un polinomio di grado dispari ($deg(P)=n+1$), e ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.

2) Per n pari si ha $\lim_{x\to+\infty}P(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}P(x)=-\infty$, $P'(x)=x^n-10>0 \iff x^n>10 \iff |x|>10^{\frac{1}{n}}$.

3) Per n dispari si ha $\lim_{x\to\pm\infty}P(x)=+\infty$, $P'(x)=x^n-10>0 \iff x^n>10 \iff x>10^{\frac{1}{n}}$.

4) $10^{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-n}{n+1}+100\geq 0 \iff 10^{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-n}{n+1}\geq -100 \iff 10^{1+\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}\leq 100 \iff 10^{-\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{n}{n+1}\leq 1$, che è vera $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ (e la disuguaglianza è stretta) poiché per entrambi i fattori al primo membro si ha $10^{-\frac{n-1}{n}}\leq 1$, $\frac{n}{n+1}<1\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

5) Per $n=0$, $P(x)=x-10x+100=-9x+100$ ha un solo zero in $x=\frac{100}{9}$.
Per $n>0$, dalle osservazioni ai punti 2) e 3), da cui evinciamo l'andamento qualitativo del grafico di $P(x)$, segue che c'è un unico punto di minimo relativo in $x=10^{\frac{1}{n}}$ dove si annulla la derivata prima $P'(x)$. Inoltre $P(10^{\frac{1}{n}})=10^{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)+100>0$ per quanto detto al punto 4). Se n è dispari, allora $x=10^{\frac{1}{n}}$ è anche un punto di minimo assoluto, e dunque $P(x)>0\ \forall x$ e $P(x)$ non ha zeri. Se n è pari $P(x)$ ha un unico zero che si trova nell'intervallo $(-\infty,-10^{\frac{1}{n}})$, dove $P(x)$ è crescente.

1.3 (15 punti.)

Osserviamo che determinare le variabili a, b, c, d, definite nel testo dell'esercizio, equivale a trovare un polinomio nella variabile $\frac{1}{x}$ che approssimi la funzione $f(x)$ in un intorno del punto $\frac{1}{x} = 0$ (infatti $x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^+$).
Posto dunque $y = \frac{1}{x}$, abbiamo

$$f(x(y)) = \log\left(\frac{1}{y}+1\right) - \log\left(\frac{1}{y}-1\right) - 2y =$$

$$= \log\left(\frac{\frac{1}{y}+1}{\frac{1}{y}-1}\right) - 2y = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) - 2y = \log(1+y) - \log(1-y) - 2y.$$

Dallo sviluppo di Taylor (in $y = 0$)
$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + O\left(y^3\right)$
si ottiene

$$f(x(y)) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \left(-y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right) - 2y + O\left(y^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}y^3 + O\left(y^3\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

ovvero $a = b = c = 0$ e $d = \frac{2}{3}$.

Passiamo all'analisi dell'integrale improprio.
Come abbiamo appena visto, si ha $f(x) \approx \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ per $x \to +\infty$, e dunque non ci sono problemi di integrabilitá all'infinito.
Nell'estremo di integrazione inferiore ($x = 1$) abbiamo che $\log(x-1)$ è l'unico addendo non limitato della funzione integranda, che sappiamo peró essere ivi integrabile; infatti $\int_1^M \log(x-1)\,dx = \int_0^M \log z\,dz$, con $z = (x-1)$, e il logaritmo è integrabile in un intorno destro dell'origine.
Calcoliamo dunque l'integrale: siccome una primitiva di $\log x$ è $x\log x - x$, abbiamo

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \left[(x+1)\log(x+1) - (x+1) - (x-1)\log(x-1) + (x-1) - 2\log x\right]_1^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - 2\right] +$$

$$- \lim_{x\to 1} [(x+1)\log(x+1) - (x+1) - (x-1)\log(x-1) + (x-1) - 2\log x] =$$
$$= 2 + 0 - 2 - (2\log 2 - 2 - 0 + 0 - 0) = -2(\log 2 + 1),$$

dove si è calcolato

$$\lim_{x\to+\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2}{x-1} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2.$$

1.4 (25 punti.)

1) Detto $z := |(x,y)|^2$, si ha $f(x,y) = (z-1)^2$, quindi la f è una funzione a simmetria radiale, positiva ($f(x,y) > 0$) e coerciva, cioè tale che $f(x,y) \to +\infty$ se $|(x,y)| \to +\infty$.
Se la funzione g soddisfa l'ipotesi

$$k := \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y) - g(x,y)| < +\infty$$

allora anch'essa sará coerciva e limitata dal basso
(infatti $g(x,y) \geq k \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$).
g dovrá quindi avere un punto di minimo assoluto $(x_m, y_m) \in \mathbb{R}^2$, che sará anche un punto di minimo relativo ove il gradiente di g si annulla.

2) Sia $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |f(x,y) - g(x,y)| < \frac{1}{2}$; consideriamo il sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ $\mathcal{B}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq 1\}$ e studiamo la restrizione della funzione g a $\mathcal{B}_1$.
Sulla frontiera $\mathcal{S}_1 := \partial\mathcal{B}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } x^2 + y^2 = 1\}$ abbiamo

$$g(x,y) < f(x,y) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

dove si è calcolato
$f(x,y)|_{\mathcal{S}_1} = (x^2 + y^2 - 1)^2 |_{\mathcal{S}_1} = (1-1)^2 = 0$.
Nell'origine di $\mathbb{R}^2$ abbiamo invece

$$g(0,0) > f(0,0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

dove $f(0,0) = (0-1)^2 = 1$.
La funzione g è per ipotesi una funzione continua e $\mathcal{B}_1$ è un compatto di

$\mathbb{R}^2$, dunque, per il teorema di Weierstrass, g deve avere un massimo (e un minimo) su $\mathcal{B}_1$. Abbiamo visto che $g(x,y)|_{\mathcal{S}_1} < \frac{1}{2} < g(0,0)$, dunque il massimo della funzione g su $\mathcal{B}_1$ è raggiunto in un punto interno (ossia su $\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{S}_1$) che sará un punto stazionario di massimo relativo per g. Tale punto è ovviamente distinto da quello di minimo trovato in precedenza.

1.5 (25 punti.)

(i) Il sistema si può riscrivere come un'equazione differenziale di secondo ordine:

$$\ddot{x} = F(\dot{x})G(x) \qquad \Longrightarrow \qquad m(\dot{x})\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x},$$

dove

$$m(y) = 1/F(y) > 0, \qquad V(x) = -\int_0^x G(x')\,\mathrm{d}x'.$$

Quindi si può interpretare $m(\dot{x})$ come un termine di massa dipendente dalla velocità $\dot{x}$ e $V(x)$ come un termine di energia potenziale (così che $G(x)$ è la forza corrispondente).

(ii) Si cerca una funzione $H(x,y)$ tale che $\dot{x} = \partial H/\partial y$ e $\dot{y} = -\partial H/\partial x$. Quindi dovrebbe essere

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = -F(y)G(x).$$

Integrando la prima si ottiene

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} + c_1(x),$$

dove c_1 è una funzione arbitraria di x, mentre integrando la seconda si ottiene

$$H(x,y) = -F(y)V(x) + c_2(y),$$

dove c_2 è una funzione arbitraria di y. Si vede quindi che nessuna scelta delle funzioni c_1 e c_2 consente di uguagliare le due espressioni, a meno che non sia $F(y) = \text{cost}$. Quindi il sistema è hamiltoniano se e solo se la funzione F è costante.

(iii) Derivando rispetto al tempo si trova

$$\dot{K} = \frac{y}{F(y)}\,\dot{y} - G(x)\,\dot{x} = \frac{y}{F(y)}\,(\dot{y} - F(y)G(x)) = 0,$$

quindi K è una costante del moto.

(iv) Il moto avviene sulle curve di livello

$$\Gamma_E = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : K(x,y) = E\big\}$$

della funzione H. Per $G(x) = -4x - 4x^3$ e $F(y) = 1/(4+4y^2)$ si trova

$$K(x,y) = y^4 + 2y^2 + x^4 + 2x^2.$$

Quindi $E \geq 0$, e $\Gamma_0 = \{(0,0)\}$. Le curve Γ_E sono curve limitate: infatti $K(x,y) = E$ su Γ_E e $K(x,y) \to \infty$ per $x^2+y^2 \to \infty$. Inoltre le curve Γ_E sono chiuse. Di conseguenza le traiettorie sono tutte limitate, e dopo un tempo finito tornano al punto di partenza. Il punto $(0,0)$ è l'unico punto d'equilibrio del sistema; per ogni dato iniziale $(\bar{x},\bar{y}) \neq (0,0)$ la traiettoria corrispondente è periodica.

(v) Ogni curva di livello Γ_E, $E \geq 0$, contiene un'unica orbita, di equazione

$$y^4 + 2y^2 + x^4 + 2x^2 - E = 0,$$

che dà

$$y^2 = -1 \pm \sqrt{1 + E - 2x^2 - x^4},$$

dove solo la determinazione con il + va presa. Si ottiene quindi

$$y = y(x) = y_E(x) = \pm f_E(x), \qquad f_E(x) = \sqrt{\sqrt{1 + E - 2x^2 - x^4} - 1},$$

che è definita purché

$$1 + E - 2x^2 - x^4 \geq 0, \qquad 1 + E - 2x^2 - x^4 \geq 1.$$

Le due condizioni sono equivalenti all'unica condizione $2x^2 + x^4 \leq E$, che, risolta, dà

$$|x| \leq x_E = \sqrt{\sqrt{1+E} - 1}.$$

Per simmetria è sufficiente studiare l'orbita nel primo quadrante $Q_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$. In conclusione, per ogni $E \geq 0$, si deve studiare la funzione

$$y = f_E(x) = \sqrt{\sqrt{1 + E - 2x^2 - x^4} - 1}, \qquad 0 \leq x \leq x_E = \sqrt{\sqrt{1 + E} - 1}.$$

La funzione $x \to f_E(x)$ è decrescente e convessa, come è facile verificare. Infatti

$$f'_E(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f_E}{\mathrm{d}x} = -\frac{(x + x^3)}{g(x)\sqrt{g(x) - 1}}, \qquad g(x) = \sqrt{1 + E - 2x^2 - x^4} \geq 1,$$

che mostra che $f'_E(0) = 0$, $f'_E(x) < 0$ per $0 < x < x_E$ e $f'_E(x_E) = -\infty$. Inoltre

$$f''_E(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 f_E}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{g^2(x)(g(x) - 1)(1 + 3x^2) + (x + x^3)^2(3g(x) - 2)}{g^3(x)(g(x) - 1)^{3/2}},$$

così che si ottiene $f''_E(x) < 0$ per $0 \leq x \leq x_E$. Del resto lo stesso risultato si poteva vedere direttamente notando che la funzione $(x, y) \to K(x, y)$ è convessa.

Per $E > 0$, le traiettorie hanno quindi luogo sulle orbite di equazione $y = y_E(x)$, sono periodiche, e vanno da sinistra a destra nel semipiano superiore e da destra a sinistra nel semipiano inferiore. Per $E = 0$ la traiettoria si riduce al punto d'equilibrio. Tale punto è quindi un punto d'equilibrio stabile: lo stesso risultato si può ottenere anche dal teorema di Ljapunov, prendendo $K(x, y)$ come funzione di Ljapunov.

1.6 (25 punti.) Dissertazione teorica.