AM210-2014/15: Tracce delle lezioni-VIII Settimana

SERIE DI FOURIER

NOTAZIONI e DEFINIZIONI.

- $\mathcal{I}_{2\pi} = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R},$ assolutamente integrabile in $[-\pi, \pi]\}$ (le $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$ si intendono prolungate in modo 2π-periodico a tutto $\mathbf{R}$) $\mathcal{I}_{2\pi}$ é spazio vettoriale e $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$ é la *norma della convergenza in media.*

- $\mathcal{I}^2_{2\pi} = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R},\quad 2\pi - \text{periodica ed } f^2 \text{ é assolutamente integrabile}\}$ e

$$\|f\|_2^2 = < f,\, f > := \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt, \qquad < f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt \qquad \forall f \in \mathcal{I}^2_{2\pi}$$

é la sua norma (*hilbertiana*) detta della *convergenza in media quadratica.* Da Cauchy-Schwartz: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt \le \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ e quindi $\mathcal{I}^2_{2\pi} \subset \mathcal{I}_{2\pi}$.

- $C_{2\pi} = C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R}),\ 2\pi$ *periodica*$\}$ (algebra delle funzioni continue e 2π-periodiche in $\mathbf{R}$). Ovviamente $C_{2\pi} \subset \mathcal{I}^2_{2\pi}$. Oltre alle due norme $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$, in $C_{2\pi}$ é definita anche la norma della *convergenza uniforme*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)| \qquad \forall f \in C_{2\pi}. \qquad \text{É} \qquad \|f\|_2 \le \sqrt{2\pi}\,\|f\|_\infty \quad \forall\, f \in C_{2\pi}$$

- $\mathcal{P} := \{p(t) := \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \quad a_n, b_n \in \mathbf{R},\quad N \in \mathbf{N} \quad t \in \mathbf{R}\}$ $\subset C_{2\pi}(\mathbf{R})$ é la sottoalgebra dei *polinomi trigonometrici*, ovvero l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori (*mutuamente ortogonali*)

$$1, \quad \cos t, \quad \sin t, \ldots, \cos(nt), \quad \sin(nt), \ldots$$

che, normalizzati rispetto alla norma 'hilbertiana', vanno a formare il **sistema ortonormale**

$$e_0^p \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad e_n^p := \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \qquad e_n^d := \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \qquad n \in \mathbf{N}$$

- $E_N := \{p_N(t) := \sum_{n=0}^{N} a_n\, e_n^p + b_n\, e_n^d, \qquad a_n, \quad b_n \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}\}, \qquad N \in \mathbf{N}$

$a_n = < p_N\,,\, e_n^p >,\quad b_n = < p_N\,,\, e_n^d >$ sono le componenti di p_N nella base ortonormale di E_N, $e_0^p, e_n^p, e_n^d, n = 1, \ldots, N$, e sono detti *coefficenti di Fourier di* p_N

- Data $\quad f \in \mathcal{I}_{2\pi}$,

$$< f \, , \, e_0^p > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$< f \, , e_n^p > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \qquad < f \, , e_n^d > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt, \qquad n \in \mathbf{N}$$

sono i **coefficenti di Fourier** di f e

$$P_N f := \sum_{n=0}^{N} < f \, , \, e_n^p > e_n^p + < f \, , \, e_n^d > e_n^d =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{N} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos nt \, dt \right) \cos nt + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \sin nt \, dt \right) \sin nt \right]$$

é la sua *proiezione ortogonale su* E_N (cioé $P_N \in \mathcal{L}(\mathcal{I}^2_{2\pi})$, $P_N^2 = P_N$, $P_N(\mathcal{I}^2_{2\pi}) = E_N$, $Ker P_N = E_N^{\perp}$)

CONVERGENZA NELLE SERIE DI FOURIER

Sia integrabile in $[-\pi, \pi]$. La serie (*formale*)

$$< f \, , \, e_0^p > + \sum_{n=1}^{\infty} < f \, , \, e_n^p > e_n^p + < f \, , \, e_n^d > e_n^d =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos nt \, dt \right) \cos nt + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \sin nt \, dt \right) \sin nt \right]$$

é la **serie di Fourier di** f.

Definizione f, integrabile in $[-\pi, \pi]$, é **sviluppabile in serie di Fourier** (in qualche senso) o che é somma (in qualche senso) della propria serie di Fourier se $f = \lim_N P_N f$ (limite in qualche senso) e scriveremo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos nt \, dt \right) \cos nt + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \sin nt \, dt \right) \sin nt \right]$$

Se $(P_N f)(t) \to_N f(t) \quad \forall t \in [-\pi, \pi]$ diremo che f é somma in ogni punto della sua serie di Fourier, o che lo é *nel senso della convergenza puntuale* (ed in tal caso f é necessariamente 2π periodica). Ma potrebbe essere una convergenza associata ad una norma (questo non é il caso della convergenza puntuale!):

Definizione Sia E spazio normato, $x_n \in E$. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ converge -con somma x- se e solo se esiste il $\lim_N \sum\limits_{n=0}^{N} x_n$ -ed é uguale a x- e si scrive

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n := \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n \qquad \Leftrightarrow \qquad \|x - \sum_{n=0}^{N} x_n\| \to_N 0$$

Data f integrabile, potremo chiederci se f é somma, nel senso della convergenza uniforme, della propria serie di Fourier (ed in tal caso, necessariamente, $f \in C_{2\pi}$), ovvero se

$$\|f - P_N(f)\|_\infty \to_N 0$$

Se ció avviene, e siccome $\|.\|_\infty$ é piú forte di $\|.\|_2$, giacché $\|f\|_2^2 \leq 2\pi \|f\|_\infty^2$, f sará anche somma *in media quadratica* della propria serie di Fourier

$$\|f - P_N(f)\|_2 \to_N 0$$

Ma puó accadere (come vedremo) che una funzione con discontinuitá sia somma in media quadratica della propria serie di Fourier (ovviamente non lo sará nel senso della convergenza uniforme).

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

$$\|f - P_N(f)\|_2 \to_N 0 \qquad \forall\, f \in C_{2\pi}$$

Ció deriva da due fatti

1. $\forall f \in C_{2\pi}, \quad \exists p_n \in \mathcal{P} : \qquad \|f - p_n\|_\infty \to_n 0 \qquad$ (**densitá di $\mathcal{P}$ in $C_{2\pi}$**)

2. Proprietá minimizzante della proiezione ortogonale

$$\|P_N f \;-\; f\|_2^2 \;\leq\; \|h - f\|_2^2 \qquad \forall h \in E_N$$

cioé $P_N f$ minimizza la distanza di f da E_N. Tale proprietá si vede cosí:

$$< f - P_N f, e_n >= 0 \quad \forall n = 0, 1, \ldots, N \quad \Rightarrow \quad < f - P_N f, h - P_N f >= 0 \quad \forall h \in E_N$$

$$\stackrel{Pitagora}{\Longrightarrow} \qquad \|h - f\|_2^2 = \|h - P_N f\|_2^2 + \|P_N f \;-\; f\|_2^2 \geq \|P_N f \;-\; f\|_2^2 \quad \forall h \in E_N$$

Prova della convergenza in media quadratica. Data $f \in C_{2\pi}$, siano $p_n \in \mathcal{P}$ tali che $\|f - p_n\|_\infty \to_n 0$. Sia $p_n \in E_N$, $N = N(n)$. Allora

$$\|f - P_N f\|_2^2 \;\leq\; \|f - p_n\|_2^2 \;\leq 2\pi \|f - P_n\|_\infty^2 \to_n 0$$

Dunque,

ogni $f \in C_{2\pi}$ é somma in media quadratica della propria serie di Fourier :

$$f = \lim_n \left[\sum_{n=0}^{N} < f,\, e_n^p > \; e_n^p + \; < f,\, e_n^d > \; e_n^d \right] \qquad in \quad (C_{2\pi}, \|.\|_2)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \, + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos nt \, dt \right) \cos nt \, + \, \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \cos nt \, dt \right) \cos nt$$

(*nel senso della convergenza in media quadratica*). Ma tale convergenza non sará in generale uniforme (e neppure puntuale!).

NOTA 1. Lo stesso argomento dice che

$$\exists p_N \in \mathcal{P} : \qquad \|f - p_N\|_2 \to_N 0 \quad \Rightarrow \quad \|f - P_N f\|_2 \to_N 0 \qquad (*)$$

cioé ogni funzione che sia limite in media quadratica di polinomi trigonometrici é somma, in media quadratica, della propria serie di Fourier. In effetti ogni funzione in $\mathcal{I}_{2\pi}$ é limite, in media quadratica, di polinomi trigonometrici, ma questo non possiamo provarlo qui.

Corollario (principio di identitá) Siano $f, g \in C_{2\pi}$. Allora

$$< f, e_n^p > = < g, e_n^p >, \quad < f, e_n^d > = < g, e_n^d > \quad \forall n = 0, 1, \dots \quad \Rightarrow \quad f \equiv g$$

Infatti $< f - g, e_n^p > = < f - g, e_n^d > = 0 \quad \forall n$ e siccome $f - g$ é somma (in media quadratica) della sua serie di Fourier, $\|f - g\|_2 = 0$ e quindi $f - g \equiv 0$ perché $f - g$ é continua.

NOTA 2. Il principio di identitá (nella forma: $< f, e_n^i > \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2 = 0$) vale per ogni f per cui vale $(*)$ in NOTA 1 (e quindi per ogni $f \in \mathcal{I}_{2\pi}^2$!)

CONVERGENZA UNIFORME

Consideriamo la *serie trigonometrica*

$$f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \qquad t \in \mathbf{R}$$

Se la serie converge uniformemente, ovvero

$$P_N f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt \to_N f \quad uniformemente$$

f é somma uniforme della propria serie di Fourier (e quindi $f \in C_{2\pi}$). In particolare

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \|f - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt\|_\infty \to_N 0$$

Questa osservazione, insieme al principio di identitá, dá la seguente

Proposizione

Sia $f \in C_{2\pi}$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} | < f,\, e_n^p > | + | < f,\, e_n^d > | < \infty \quad \Rightarrow \quad \|f - P_N f\|_\infty \to_N 0$$

ovvero, *se la serie dei coefficenti di Fourier di f é assolutamente convergente, allora f é somma uniforme della propria serie di Fourier.*

Prova. Dall'ipotesi segue che la serie di Fourier di f é totalmente convergente. Dobbiamo mostrare che la sua somma, diciamo g, é proprio f. Ed infatti f e g hanno, chiaramente, gli stessi coefficenti di Fourier, ed essendo entrambe continue, debbono essere, per il principio di identitá, uguali.

NOTA. Non é purtroppo vero che per ogni $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ la serie dei coefficenti di Fourier risulti assolutamente convergente.

La diseguaglianza di Bessel dá una proprietá simile ma piú debole:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} | < f, e_n^p > |^2 + | < f, e_n^d > |^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty \qquad \forall f \in \mathcal{I}^2$$

Teorema (Sviluppabilitá di funzioni C^1).

Ogni $f \in C^1_{2\pi}$ é somma uniforme della propria serie di Fourier.

Lemma. Sia $f \in C^1 \cap C_{2\pi}$. Allora

$$< f', e_n^p >= n < f, e_n^d >, \quad < f', e_n^d >= -n < f, e_n^p > \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

Prova.

Segue da una integrazione per parti e dalla periodicitá:

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) \cos nt)' \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos nt \, dt - n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) \sin nt)' \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt \, dt + n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

Prova del Teorema .

Da $f' \in C_{2\pi}$ segue, per Bessel ed usando il Lemma, che

$$\sum_n |n < f, e_n^d > |^2 \; + \; |n < f, e_n^p > |^2 \; = \; \sum_n | < f', e_n^p > |^2 \; + \; | < f', e_n^d > |^2 \; \leq \; \|f'\|_2^2$$

Utilizzando Cauchy-Schwartz (in l^2), otteniamo

$$\sum_{n \geq 1} | < f, e_n^p > | + | < f, e_n^d > | = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} |n < f, e_n^p > | + \frac{1}{n} |n < f, e_n^d > | \leq$$

$$\left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{n \geq 1} |n < f, e_n^p > |^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n \geq 1} |n < f, e_n^d > |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] < \infty$$

Un'applicazione della Proposizione dá dunque il Teorema.

Sviluppabilitá di funzioni regolari a tratti.

L'ipotesi C^1 su f nel Teorema 1 si puó indebolire chiedendo ad $f \in C_{2\pi}$ di essere C^1 'a tratti', ovvero di essere C^1 al di fuori di un insieme discreto. Supponiamo dunque che, data $f \in C_{2\pi}$ esistano $t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p$, $p \in \mathbf{N}$ tali che

$$f \in C([t_1, t_p]) \cap C^1\left((t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{p-1}, t_p)\right)$$

Al fine di mostrare la validitá del Lemma (e quindi del Teorema 1) per tale f, basterá provare che, presa $g \in C^1([t_1, t_2])$, allora $\int_{t_1}^{t_p} (fg)'(t)dt$ ed $\int_{t_1}^{t_p} f'(t)g(t)dt$ esistono (eventualmente in senso improprio) e valgono formula di integrazione per parti e TFC (caso $g \equiv 1$):

$$\int_{t_1}^{t_p} f'(t)g(t)dt = (fg)(t_p) - (fg)(t_1) - \int_{t_1}^{t_p} f(t)g'(t)dt$$

Infatti, se $\epsilon_j, \delta_j \to 0^+$, troviamo

$$\int_{t_j+\epsilon_j}^{t_{j+1}-\delta_{j+1}} f'g = \int_{t_j+\epsilon_j}^{t_{j+1}-\delta_{j+1}} (fg)' - \int_{t_j+\epsilon_j}^{t_{j+1}-\delta_{j+1}} fg' = (fg)(t_{j+1} - \delta_{j+1}) - (fg)(t_j + \epsilon_j) -$$

$$- \int_{t_j+\epsilon_j}^{t_{j+1}-\delta_{j+1}} fg' \xrightarrow{\epsilon_j+\delta_{j+1}\to 0} (fg)(t_{j+1}) - (fg)(t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} fg'$$

ovvero, la quantitá a primo membro ha limite e quindi

$$\exists \quad \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'g \overset{!}{=} (fg)(t_{j+1}) - (fg)(t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} fg'$$

Sommando in j troviamo la formula di integrazione per parti su tutto $[t_1, t_p]$. Il Lemma continua dunque a valere anche se f é solo C^1 a tratti. Si é cioé ottenuta la seguente estensione :

Teorema **(Sviluppabilitá di funzioni C^1 a tratti)**

Sia $f \in C_{2\pi} \cap C^1\left((t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{p-1}, t_p)\right)$, $-\pi = t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = \pi$. Se $\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 dt < \infty$, allora f é somma uniforme della propria serie di Fourier.

CONVERGENZA UNIFORME, PUNTUALE PER SERIE DI FOURIER DI FUNZIONI A VALORI COMPLESSI

Abbiamo finora considerato la sviluppabilitá in serie di Fourier nel senso della convergenza in media quadratica, valida per tutte le funzioni $C_{2\pi}$, od uniforme, anch'essa ristretta, a maggior ragione, alle funzioni $C_{2\pi}$, ma tuttavia non valida per tutte le funzioni siffatte.
Per interessare funzioni continue ma non sufficentemente regolari, o per includere addirittura funzioni con discontinuitá, ci limiteremo a presentare ipotesi che assicurino la convergeza puntuale nelle serie di Fourier.
Prima di farlo, estendiamo quanto finora visto a funzioni a valori complessi.

Lo spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ ed i polinomi trigonometrici (complessi)

Scriveremo: $\int\limits_{-\pi}^{\pi} [h(t) + ik(t)]dt := \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)dt + i \int\limits_{-\pi}^{\pi} k(t)dt$ se $h, k \in \mathcal{I}_{2\pi}$,

$$\mathcal{I}^2_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) = \{f + ig| \quad f, g \in \mathcal{I}^2_{2\pi}\}$$

$$C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) := \{f + ig : \quad f, g \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{R})\} \subset \mathcal{I}^2_{2\pi}(\mathbf{C})$$

(spazi vettoriali su $\mathbf{C}$). In $\mathcal{I}^2_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ sono definite le norme

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = \ < f, f >^{1/2} \qquad \forall f \in \mathcal{I}^2_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}} |f(t)| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]} |f(t)| \qquad \forall f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

ove $< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g}(t)dt$ é un prodotto scalare:

$$< g, f >= \overline{< f, g >}$$

$$< \lambda f, g >= \lambda < f, g >, \quad < f, \lambda g >= \overline{\lambda} < f, g > \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall f, g \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

Continua a valere Cauchy-Schwartz (e quindi $\|f\|_2$ é effettivamente una norma), come si vede sciegliendo $\lambda =< f, g > \|g\|^{-2}$ nella diseguaglianza

$$0 \leq < f - \lambda g, f - \lambda g >= \|f\|^2 + | < f, g > |^2 \|g\|^{-2} - \lambda < g, f > -\overline{\lambda} < f, g >$$

$$= \|f\|^2 + | < f, g > |^2 \|g\|^{-2} - 2\frac{| < f, g > |^2}{\|g\|^2} = \|f\|^2 - \frac{| < f, g > |^2}{\|g\|^2}$$

E vale anche Pitagora: $< f, g >= 0 \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|^2_2 = \|f\|^2_2 + \|g\|^2_2$.

Siccome $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, le funzioni

$e_n := e^{int}, n \in \mathbf{Z}$ formano un *sistema ortonormale* in $(\mathcal{I}^2_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \|.\|_2)$:

$$< e_n, e_m >= 0 \quad \text{se} \quad n \neq m, \quad < e_n, e_n >= 1 \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

In particolare

$$\| \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Diseguaglianza di Bessel. Sia $f \in \mathcal{I}^2_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | < f, e_n > |^2 \leq \|f\|_2^2$$

Infatti, per Pitagora $< \left[f - \sum\limits_{n=-N}^{N} < f, e_n > e_n \right], \sum\limits_{n=-N}^{N} < f, e_n > e_n >= 0 \quad \Rightarrow$

$$\|f\|_2^2 = \|f - \sum_{n=-N}^{N} < f, e_n > e_n\|_2^2 + \| \sum_{n=-N}^{N} < f, e_n > e_n\|_2^2 \geq \sum_{n=-N}^{N} | < f, e_n > |^2$$

Gli e_n generano il sottospazio $\mathcal{P}$ dei *polinomi trigonometrici complessi*:

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \qquad c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad a_n, b_n \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{Z}, \ N \in \mathbf{N}$$

$$P_N \quad \text{é reale} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}} = \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_{-m}} e^{imt} \quad \Leftrightarrow \quad a_{-n} = a_n, \ b_{-n} = -b_n \quad \forall n$$

Usando le formule di Eulero, vediamo che P_N é reale se e solo se si scrive nella forma:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = a_0 + \sum_{0<|n|\leq N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}, \qquad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$$

In particolare, se P_N, Q_M sono due polinomi trigonometrici reali, allora $P_N + iQ_M$ é polinomio trigonometrico complesso. Dal Teorema di approssimazione per funzioni in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ segue quindi la

Densitá di $\mathcal{P}$ in $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) := \{f + ig : \quad f, g \in C_{2\pi}(\mathbf{R})\}$

$$\forall f \in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})} \quad \exists P_N \in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})}, \quad \text{polinomi trigonometrici:} \quad \|P_N - f\|_\infty \to_N 0$$

Corollario (Principio di identitá) Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Allora

$$< f, e_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Infatti, siano P_N polinomi trigonometrici tali che $\|P_N - f\|_\infty \to_N 0$ e quindi $\|P_N - f\|_2 \to_N 0$ e quindi $< f, P_N >\to \|f\|_2^2$. Ma $< f, e_n >= 0 \, \forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ $< f, P_n >= 0 \quad \forall N$ e quindi $0 =< f, P_n >\to \|f\|_2^2 \Rightarrow f = 0.$

Serie trigonometriche Sia $c_n \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}$ tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| := \sup_{N \in \mathbf{N}} \sum_{n=-N}^{N} |c_n| < \infty$$

allora la serie di potenze $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ converge, uniformemente, per $|z| \leq 1$. In particolare é definita la funzione o *serie trigonometrica*

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Chiaramente, $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ e

$$c_n =< f, e_n >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \qquad \|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER

Definizione (coefficenti di Fourier). Data $f \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, restano definiti

$$\hat{f}_n :=< f, e_n >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad \textbf{(coefficenti di Fourier) di} \quad f$$

Definizione (serie di Fourier). Data $f \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \textbf{é serie di Fourier di} \quad f$$

f si dice **sviluppabile in serie di Fourier** se la sua serie di Fourier converge e

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \forall \quad t \in \mathbf{R}$$

La serie di Fourier di una $f \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ non convergerá, in generale, neppure puntualmente! Un esempio di funzione sviluppabile in Serie di Fourier é dato dalla serie trigonometrica $\quad f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad$ nell'ipotesi che $\quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{int} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

Teorema 1. $\quad f \in C_{2\pi}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \;\Rightarrow\; f$ *é somma (uniforme) della propria serie di Fourier e* $\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2 \quad$ *(identitá di Parseval)*

Prova. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad g(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \quad$ é in $C_{2\pi}$ ed ha gli stessi coefficenti di Fourier di f. La conclusione viene dal Principio di Identitá.

NOTA. Non é vero che per ogni $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ risulti $\quad \sum_{n \in \mathbf{Z}}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty$. La diseguaglianza di Bessel dá una proprietá simile ma piú debole:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2 \leq \|f\|_2^2 < +\infty \qquad \forall f \in \mathcal{I}$$

Notiamo che basterebbe poco di piú: $\quad \exists\, \alpha > \frac{1}{2}$ tale che $\quad \sum_n |n^\alpha \hat{f}_n|^2 < \infty \quad \overset{CS}{\Longrightarrow}$ $\sum_n |\hat{f}_n| \leq \left(\sum_n |n^\alpha \hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ e quindi f é sviluppabile in serie di Fourier.

Sviluppabilitá di funzioni C^1.

La situazione in NOTA (caso $\alpha = 1$) si incontra se $f \in C^1$, ove

$$f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \Re f, \Im f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R}) \quad e \quad f' := (\Re f)' + i(\Im f)'$$

Teorema 2. $\quad$ *Ogni $f \in C^1_{2\pi}$ é somma uniforme della propria serie di Fourier.*

Lemma. $\quad f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(n) = -\frac{i}{n} \widehat{f'}(n) \quad \forall n \neq 0.$

Prova.

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) e^{-int} \right)' dt = \hat{f'}_n - i\, n\; \hat{f}_n \quad \text{e quindi} \quad \hat{f}_n = -\frac{i}{n} \widehat{f'}(n) \quad \forall n \neq 0$$

Prova del Teorema 2. Da $f' \in C_{2\pi}$ segue, per Bessel ed usando il Lemma, che $\sum_n |n \hat{f}_n|^2 < \infty$. $\quad$ Procedendo come sopra, otteniamo da Cauchy-Schwartz

$$\sum_{n \neq 0} |\hat{f}_n| = \sum_{n \neq 0} |n \hat{f}_n|\, |\frac{1}{n}| \leq \left(\sum_{n \neq 0} |n \hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}}) < \infty$$

Regolaritá e decadimento dei coefficenti di Fourier.

Una ovvia estensione del Lemma dice che

$$f \in C^k_{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_n = (\frac{1}{in})^k \left(\widehat{f^{(k)}}\right)_n \quad \forall n \neq 0$$

e quindi, per Bessel, $\sum |n|^{2k} |\hat{f}_n|^2 < \infty$ e quindi $|\hat{f}_n| = \circ(\frac{1}{n^k})$.
Viceversa, piú é rapido il decadimento di $\hat{f}_n$ pú alta é la regolaritá di f: $\exists \alpha > \frac{1}{2}$:

$$\sum |n|^{2(k+\alpha)} |\hat{f}_n|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum |n^k \hat{f}_n| \leq \left(\sum_n |n|^{2(k+\alpha)} |\hat{f}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

e quindi la serie di Fourier di f converge uniformemente insieme alle sue prime k derivate e quindi $f \in C^k$. Ne deriva che, se $f \in C_{2\pi}$, allora

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}) \quad \text{se e solo se} \quad \hat{f}(n) = O(\frac{1}{|n|^p}) \qquad \forall p \in \mathbf{N}.$$

NOTA. Si puó dimostrare che 'analiticitá equivale a decadimento esponenziale' dei coefficenti di Fourier: se $f \in C_{2\pi}$, allora

$$f \quad \text{é analitica} \quad \Leftrightarrow \quad \exists C, \sigma > 0 : \qquad |\hat{f}(n)| \leq C e^{-\sigma |n|}$$

Sviluppabilitá di funzioni regolari a tratti.

Esattamente come nel caso reale, si ha la seguente estensione

Teorema 2 bis. Siano $-\pi = t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = \pi, p \in N$ ed $f \in C_{2\pi} \cap C^1\left((t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{p-1}, t_p)\right)$. Se $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 dt < \infty$, allora f é somma uniforme della propria serie di Fourier.

Infatti, per quanto sopra, $\hat{f}(n) = -\frac{i}{n} \widehat{f'}(n)$ e, per Bessel, $\sum_n |\widehat{f'}(n)|^2 < \infty$.

NOTA. Basterebbe $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'|^p dt < \infty$ per un $1 < p < 2$, perché si puó provare che

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g|^p dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n |\hat{f}(n)|^q < \infty, \quad \text{ove} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (\text{ Hausdorff-Young})$$

Convergenza puntuale nelle serie di Fourier (il criterio di Dini)

Teorema 4 *(sviluppabilitá in serie di Fourier per funzioni Lipschitziane).*

Sia $f \in \mathcal{I}^2_{2\pi}$. Se vale la *condizione di Dini* in τ:

$$\exists \delta > 0 : \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t+\tau) - f(\tau)}{t} \right| dt < \infty$$

allora $\quad f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau}$: $\quad f$ é, in τ, somma della propria serie di Fourier.

Prova del Teorema 4. Sostituendo eventualmente $f(t)$ con $f(t+\tau)-f(\tau)$ (vedi in nota) possiamo supporre $\quad \tau = 0\,,\ f(0) = 0, \quad \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty, \quad$ e provare che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n = 0$$

Scriviamo

$$F(t) := \frac{f(t)}{e^{it}-1}, \qquad f(t) = F(t)e^{it} - F(t)$$

F é di quadrato integrabile, al pari di f, in $\{\pi \geq |t| \geq \delta\}$, ed assolutamente integrabile (eventualmente in senso improprio) in $\{|t| \leq \delta\}$, perché $\quad F(t) = \frac{f(t)}{t}\,\frac{t}{e^{it}-1}$ e $\frac{f(t)}{t}$ é assolutamente integrabile per ipotesi mentre $\frac{t}{e^{it}-1} \to_{t\to 0} \frac{1}{i}$. Ma

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[F e^{it} - F\right] e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F e^{-i(n-1)t} dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F e^{-int} = \hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n$$

Se f fosse, di piú, Lipschitziana (rapporto incrementale limitato), F sarebbe addirittura limitata, e quindi potremmo applicare Bessel: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{F}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt < \infty$ e quindi $F_n \to_{|n|\to\infty} 0$ e quindi

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n = \sum_{n=-N}^{N} [\hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n] = \hat{F}_{-N-1} - \hat{F}_N \to_N 0$$

Sotto l'ipotesi piú debole

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$$

possiamo solo dire che F é (solamente) assolutamente integrabile.
Mostriamo che F é limite in media di una successione di funzioni $\mathcal{I}^2_{2\pi}$. Basta infatti

prendere una $\varphi \in C(\mathbf{R}, [0,1])$ uguale a 1 per $|t| \geq 2$ e uguale a zero se $|t| \leq 1$ e porre $F_n(t) = F(t)\varphi(nt)$. Ed allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F - F_n|(t)dt = \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} |F(t)|(1 - \varphi(nt))dt \leq \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} |F(t)| \to_n 0$$

perché F é assolutamente integrabile. Dunque

$$|\hat{F}(n)| \leq |\hat{F}(n) - \hat{F}_k(n)| + |\hat{F}_k(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F - F_k|dt + |\hat{F}_k(n)| \leq \epsilon + |\hat{F}_k(n)| \qquad \forall k \geq k_\epsilon$$

Siccome $F_k \in \mathcal{I}^2_{2\pi}$, $\hat{F}_k \in l^2$ e quindi $\hat{F}_k(n) \to_{|n| \to \infty} 0$. Fissato $k \geq k_\epsilon$ e passando al limite, troviamo

$$\limsup_{|n| \to \infty} |\hat{F}(n)| \leq \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

cioé $\quad \hat{F}(n) \to_{|n| \to \infty} 0 \quad$ e questo basta, come sopra, per concludere.

NOTA.

(i) La condizione di Dini é certamente soddisfatta in ogni punto se f é Lipschitziana od anche solo holderiana di esponente $\alpha \in (0,1)$, ovvero

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \qquad \forall \quad x, y$$

(ii) Sia $\quad g(t) := f(t + \tau) - f(\tau)$. É $\quad g(0) = 0 \quad$ e

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t + \tau) - f(\tau)]dt \overset{t+\tau=s}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\tau}^{\pi+\tau} [f(s)ds - f(\tau) = \hat{f}(0) - f(\tau)$$

$$e, \quad se \quad n \neq 0: \qquad \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t + \tau) - f(\tau)]e^{-int}dt \overset{t+\tau=s}{=} \hat{f}_n e^{in\tau}$$

Sommando, troviamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} - f(\tau)$$

Quindi $\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} = f(\tau).$

Un'applicazione: la formula di riflessione per la funzione Γ.

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) \;=\; \frac{\pi}{\sin x\pi} \qquad\qquad \forall\, x\in(0,1)$$

Una dimostrazione elementare si ottiene provando che

a)

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) \;=\; \int_0^\infty \frac{dt}{t^x(1+t)} \qquad\qquad \forall\, x\in(0,1)$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^x(1+t)} \;=\; \frac{1}{x} - 2x\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2-x^2} \qquad\qquad \forall\, x\in(0,1)$$

c)

$$\frac{1}{x} - 2x\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2-x^2} \;=\; \frac{\pi}{\sin x\pi} \qquad\qquad \forall\, x\notin \mathbf{Z}$$

Prova di a) Segue da Fubini:

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{e^{-x(1+y)}}{y^\alpha}\,dy\right)dx \overset{xy=s}{=} \int_0^\infty\left(e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-s}x^\alpha}{s^\alpha\,x}\,dy\right)dx = \int_0^\infty\left(e^{-x}x^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{e^{-s}s^\alpha}{s^{-\alpha}}\,ds\right)dx$$

$$= \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{e^{-x(1+y)}}{y^\alpha}\,dx\right)dy \;=\; \int_0^\infty\left(\frac{1}{y^\alpha}\int_0^\infty e^{-x(1+y)}\,dx\right)dy \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{y^\alpha(1+y)}\,dy$$

Prova di b) Intanto, effettuando il cambio di variabile $t=\frac{1}{s}$, troviamo

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^x(1+t)} \;=\; \int_1^0 -\frac{s^x ds}{s^2(1+\frac{1}{s})} \;=\; \int_0^1 \frac{s^x ds}{s(s+1)} \;=\; \int_0^1 \frac{ds}{s^{1-x}(s+1)}$$

Dunque, $\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^x(1+t)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^x(1+t)} + \int\limits_0^1 \frac{ds}{s^{1-x}(s+1)}$. Sviluppando in serie $\frac{1}{1+t}$ e integrando termine a termine, troviamo

$$\int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^{-x}\,(1+t)} = \int\limits_0^1 (t^{-x} + t^{x-1})\frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^1 (t^{-x} + t^{x-1})\sum_0^\infty (-1)^n t^n\, dt =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \int\limits_0^1 \left[t^{n+x-1} \,+\, t^{n-x}\right]\, dt \,=\, \sum_0^\infty (-1)^n \left[\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n-x+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n-x} = \frac{1}{x} + \sum_1^\infty (-1)^n \left[\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n-x}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} \,-\, 2x \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2 \,-\, x^2}$$

Prova di c) Per $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, fissato, indichiamo con $f(t), t \in \mathbf{R}$, il prolungamento $2\pi-$periodico della funzione (pari) $t \to \cos(xt)$, $t \in [-\pi, \pi)$. I suoi coefficenti di Fourier sono

$$< f, e_n^d >= 0 \quad \forall n$$

$$< f, e_0^p >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(xt)dt = 2\,\frac{\sin(x\pi)}{x\sqrt{2\pi}}$$

$$< f, e_n^p >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos xt\, \cos nt\, dt \,=\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(xt-nt) + \cos(xt+nt)\, dt]$$

Siccome $f \in \mathcal{I}_{2\pi}^2 \cap C^1(-\pi, \pi)$, f é, in $(-\pi, \pi)$, somma della sua serie di Fourier:

$$f(x) := \cos(xt) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(xt)dt + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} [\cos(xt-nt) + \cos(xt+nt)]dt\right)\cos nt$$

$$= \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \left[\frac{\sin(x\pi - n\pi)}{x-n} + \frac{\sin(x\pi + n\pi)}{x+n}\right]\cos nt =$$

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} - \frac{2}{\pi}\cos nt \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{x \sin \pi x}{n^2 - x^2} = \frac{\sin \pi x}{\pi}\left[\frac{1}{x} - 2x\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2}\,\cos nt\right]$$

Quindi, posto $t = 0$, troviamo che

$$\frac{\pi}{\sin x\pi} = \frac{1}{x} - 2x\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2 - x^2}$$

ESERCIZI E COMPLEMENTI

1 . Verifichiamo che, se $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, allora

$$P_N := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \equiv \overline{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}} \quad \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \quad \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = a_0 + \sum_{0<|n|\le N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$$

$\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$: $\quad P_N = \overline{P_N} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} e^{-int} \overset{-n:=m}{=} \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_{-m}} e^{imt} \quad \Leftrightarrow$ $\overline{c_n} = c_{-n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$ perché due polinomi sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficenti, ovvero $P_N \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = 0 \quad \forall n$ e $P_N \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_m =< P_N, e_m >= 0 \quad \forall m \in \mathbf{Z}$.

$\overset{(ii)}{\Rightarrow}$: se $P_N = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$ é reale, e quindi $a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$, troviamo, usando le formule di Eulero, $\quad P_N := \sum_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} [\cos nt + i \sin nt] =$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} [\cos nt + i \sin nt] + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} [\cos nt - i \sin nt] =$$

$$a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nt + i a_n \sin nt - i b_n \cos nt + b_n \sin nt] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nt - i a_n \sin nt + i b_n \cos nt + b_n \sin nt] = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$\overset{(ii)}{\Leftarrow}$: Usando anche qui le formule di Eulero, troviamo che

$$a_{-n} := a_n, \quad b_{-n} := -b_n \quad \Rightarrow \quad P_N := a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \sum_{n=-1}^{-N} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{-int}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$$

$c_n \in \mathbf{C},\ n \in \mathbf{Z},\ N \in \mathbf{N}$. Scrivendo $c_n = a_n - ib_n$, le formule di Eulero danno

$$P_N = \sum_{n=-N}^{N} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] + i \sum_{n=-N}^{N} [a_n \sin nt - b_n \cos nt]$$

2 . Osservazione: se $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, i suoi coefficenti di Fourier sono complessi coniugati, e quindi la serie di Fourier associata é reale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \right) (\cos nt + i \sin nt) =$$

$$\tfrac{1}{2\pi} \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt) \cos nt + (\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt) \sin nt \right] +$$

$$\tfrac{i}{2\pi} \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt)\ \sin nt - (\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt)\ \cos nt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \right) \cos nt\ + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \right) \sin nt$$

3 . Osserviamo che $\quad f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad \Rightarrow$

$$(f * P_N)(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \left[c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right] e^{int}$$

cioé la convoluzione di una $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ con un polinomio trigonometrico é un polinomio trigonometrico.

4. Lemma Riemann-Lebesgue. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(s)|\, ds < \infty \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_n \to 0.$

Idea di dimostrazione. La tesi é vera se esiste $f_k \in C_{2\pi}$ tale che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_k - f| \to_k 0$. Infatti, in tal caso,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon : \qquad \limsup_n |\hat{f}(n)| \le \limsup_n |\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| \le \epsilon \quad \forall k \ge k_\epsilon$$

perché $|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f - f_k) e^{-int} \right| \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| \le \epsilon$ per $k \ge k_\epsilon$ opportuno. La tesi segue poi dal fatto che per ogni funzione assolutamente integrabile in $[-\pi, \pi]$

tali approssimanti esistono (cosa che qui non possiamo dimostrare).

5 . Esercizio. Provare che se $f \in C([-1,1]) \cap C^1((-1,1) \setminus \{0\})$ ed f' é limitata in $(-1,1) \setminus \{0\}$ allora f é Lipschitziana in $[-1,1]$.
Sia $|f'(x)| \leq c \quad \forall x \in (-1,1), x \neq 0$.
$0 < \epsilon < x < 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\epsilon)| \leq c|x - \epsilon| \quad \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq cx$
$-1 < y < -\epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(-\epsilon)| \leq c|y + \epsilon| \quad \Rightarrow |f(y) - f(0)| \leq c|y|$.
Dunque
$-1 < y \leq 0 \leq x < 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| \leq c(x - y) = c|x - y|$.