AM210: Tracce delle lezioni- III Settimana

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Indicheremo con $C_0(\mathbf{R}) := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad \exists R = R_f, \quad f \equiv 0 \quad \text{fuori di} \quad [-R, R]\}$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue a supporto compatto e con supp(f) la *chiusura* dell'insieme $\{x : f(x) \neq 0\}$.

In $C_0(\mathbf{R})$ sono definite le *norme* $\qquad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|, \quad \|f\|_1 := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$

Per ogni $f, g \in C_0(\mathbf{R})$ é definita in $\mathbf{R}$ la funzione

$$(f * g)(x) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\, dy$$

Tale operazione tra funzioni si chiama *prodotto di convoluzione* e la funzione $f * g$ é detta, semplicemente, *convoluzione* tra f e g.

NOTA. $\quad f*g$ é definita anche se $g \in C_0(\mathbf{R})$ ed f é integrabile sugli intervalli limitati.

Proposizione

(i) $\quad$ *supp* $f * g \subset$ *supp* $f +$ *supp* g e quindi $f * g \in C_0(\mathbf{R}) \quad \forall f, g \in C_0(\mathbf{R})$

(ii) $\quad$ L'applicazione $\quad (f, g) \to f * g \quad$ é $\quad$ **bilineare e simmetrica**.

(iii) $\quad \|f * g\|_\infty \leq \|g\|_1 \, \|f\|_\infty \quad \forall f, g \in C_0(\mathbf{R}) \quad$ (**continuitá**)

(iv) $\quad \|f * g\|_1 \leq \|g\|_1 \, \|f\|_1 \quad \forall f, g \in C_0(\mathbf{R}) \quad$ (**Diseguaglianza di Young**)

(v) $\quad f, g \in C_0(\mathbf{R}), g \in C^k \quad \Rightarrow \quad f * g \in C^k(\mathbf{R})$ (**effetto regolarizzante**)

(vi) $\quad f \in C_0$, p polinomio di grado $n \quad \Rightarrow \quad f * p$ é un polinomio di grado n.

Prova della Proposizione

(i) Che $f * g$ sia continua deriva dal fatto che $(x, y) \to f(y)g(x-y)$ é continua ed equidominata: $\quad |f(y)g(x-y)| \leq \|f\|_\infty |g(y)| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$. $\quad$ Poi,

$$x \notin supp\, f + supp\, g, \quad y \in\ supp\, f \quad \Rightarrow \quad x - y \notin\ supp\, g \quad \Rightarrow \quad g(x-y) = 0$$

Dunque $\quad x \notin supp\, f + supp\, g \quad \Rightarrow \quad f(y)g(x-y) = 0 \quad \forall y \quad \Rightarrow \quad (f * g)(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad supp\, f * g \subset supp\, f + supp\, g := \{a + b : \quad a \in\ supp\, f, b \in\ supp\, g\}$$

(ii) La bilinearitá é evidente. La simmetria segue dal cambio di variabile $t = x - y$:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)\,dy \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt \;=\; (g * f)(x)$$

(iii) $\quad |(f * g)(x)| :\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \;\leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,dy$

(iv) $\quad$ Per Fubini e l'invarianza dell'integrale per traslazione, $\qquad \|f * g\|_1 =$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g|(x)\,dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,dx \right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\,dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(|g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \right) dy =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,dy \right) \;=\; \|f\|_1\,\|g\|_1$$

(v) $\quad$ É una conseguenza del Teorema di derivazione sotto segno di integrale:

$$g \in C_0 \cap C^1 \quad \Rightarrow \quad |f(y)g'(x-y)| \leq \|g'\|_\infty |f(y)| \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}(f * g)(x) \;=\; \frac{d}{dx}(g * f)(x) \;=\; \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{dg}{dx}\,(x-t)dt$$

Piú in generale

$$g \in C_0^k \quad \Rightarrow \quad f * g \in C^k \quad \text{e} \quad \frac{d^j}{dx^j}(f * g)(x) \;=\; (f * \frac{d^j g}{dx^j})(x) \qquad \forall j \leq k$$

(vi) $\quad$ Scriviamo $\;p(x-y) = \sum_{k=0}^n a_k(x-y)^k = \sum_{k=0}^n b_k(y)x^k$ e quindi

$$(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(x-y)dy = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)b_k(y)dy \right) x^k$$

NOTA. Se f é solo localmente integrabile, $f * g$ non sará piú a supporto compatto, ma (ii)-(v)-(vi) continuano a valere; per (iii) basta che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty$.

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Teorema 1 Data $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$, $\varphi \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$ sia $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$ (φ **nucleo regolarizzante,** φ_n **successione regolarizzante**)
Sia f continua. Allora $f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} f$ uniformemente sui limitati.

Infatti, $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \geq R\epsilon$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\,dy = 1$, e quindi $|x| \leq M \Rightarrow$

$$|f(x) - (f * \varphi_\epsilon)(x)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \right| \leq$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)\,dy \leq \sup_{|x|\leq M,\,|x-y|\leq R\epsilon} |f(x) - f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

perché f é uniformemente continua in $[-R-\epsilon, R+\epsilon]$.

Teorema 2 Siano $\varphi_n \in C_0([-M,M])$, $\varphi_n \geq 0$, con $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = 1$ e $\int\limits_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(x)\,dx \to_n 1$ $\forall \delta > 0$ (φ_n **successione regolarizzante**) . Allora

$$\sup_{[-R,R]} |(f * \varphi_n((x) - f(x)| \to_n 0 \qquad \forall f \in C(\mathbf{R}), \quad \forall R > 0$$

Prova. Si ha $|f(x) - (f * \varphi_n)(x)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x-y))\,\varphi_n(y)\,dy \right| \leq$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{-\delta} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy +$$
$$\int\limits_{\delta}^{+\infty} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy + \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy \qquad \delta > 0.$$

Ma, per la uniforme continuitá di f in $[-(R+\delta), R+\delta]$, si ha che $\forall\epsilon, \exists\delta_\epsilon$ tale che

$$|x| \leq R \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)\,dy \leq \epsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,dx = \epsilon \qquad \text{mentre}$$

$$\int\limits_{-\delta}^{+\delta} \varphi_n(x)dx \to_n 1 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{-\delta} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)dy + \int\limits_{\delta}^{+\infty} |f(x) - f(x-y)|\,\varphi_n(y)dy \leq$$

$$\leq 4 \sup_{z\in[-(R+M),R+M]} |f(z)| \quad \left[\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(y)\,dy + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(y)\,dy \right] \to_n 0$$

ESEMPIO 1. $\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{c_n}\chi_{[-1,1]}$, $\psi_n(x) := (1-x^2)^n$, $c_n = \int\limits_{-1}^{1} \psi_n(x)dx$.

Si tratta di provare che $\varphi_n \to_n 0$ uniformemente in $|x| \geq \delta \quad \forall \delta > 0$. Intanto $|x| \geq \delta \Rightarrow (1-x^2)^n \leq (1-\delta^2)^n$. Poi,

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta d\theta \geq 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{n+1}$$

(in effetti é $\int\limits_0^1 (1-s^2)^n ds = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})\right]$). Dunque

$$\sup_{|x|\geq\delta} \varphi_n(x) \leq (1-\delta^2)^n\,(n+1) \to_n 0$$

IL TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS.

Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Allora esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[-R,R]$ quale che sia R, ovvero

$$\text{esistono polinomi } p_n \text{ tali che} \qquad \sup_{|x|\leq R} |f(x)-p_n(x)| \to_n 0 \qquad \forall R > 0.$$

Prova . Basta provare (vedi Appendice 1) che se $f(x) = 0$ per $|x| \geq \frac{2}{3}$,

allora esistono p_n polinomi tali che $\sup\limits_{|y|\leq\frac{1}{3}} |f(y)-p_n(y)| \to 0$.
Possiamo dunque supporre che $f(x) = 0$ per $|x| \geq \frac{2}{3}$. Ma, allora,

$$p_n(x) := (f*\varphi_n)(x), \quad x \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}] \quad \text{sono polinomi,}$$

(le φ_n sono quelle dell'Esempio 1) giacché $\varphi_n = c_n^{-1}\psi_n\chi_{[-1,1]}$ e

$$|x| \leq \frac{1}{3},\ |y| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x-y| \geq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x-y) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f(x-y)\chi_{[-1,1]}(y) = f(x-y) \qquad \forall y \qquad \Rightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(1-y^2)^n\chi_{[-1,1]}\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)(1-y^2)^n\,dy = (f*\psi_n)(x)$$

che sono appunto polinomi. Dunque la restrizione di p_n a $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ é un polinomo.

Basta infine osservare che, in virtú del Teorema 1, $p_n * f$ converge uniformemente sui compatti, e quindi, in particolare, su $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$), ad f.

CONVOLUZIONE in $C_{2\pi}$

Sia $C_{2\pi} := \{f \in C(\mathbf{R}), f(t+2\pi) = f(t)\ \forall t\}$ lo spazio delle funzioni continue 2π periodiche dotato della *norma della convergenza uniforme*

$$\|f\|_\infty := \sup_{\mathbf{R}} |f(x)| = \sup_{|x|\le\pi} |f(x)|$$

Un importante sottospazio lineare di $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ é quello dei polinomi trigonometrici

$$\mathcal{P} := \{P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) : a_n, b_n \in \mathbf{R}, N \in \mathbf{N}\}$$

Notiamo esplicitamente che P é una *sottoalgebra* di $C_{2\pi}$, ovvero *il prodotto di polinomi trigonometrici é un polinomio trigonometrico.* Per vederlo, basta mostrare che $\cos nt \cos mt, \sin nt \sin mt, \cos nt \sin mt$ sono polinomi trigonometrici. Verifichiamolo per $\cos nt \cos mt$, usando le formule di Eulero:

$$\cos nt \cos mt = \frac{1}{2}\left(e^{int} + e^{-int}\right)\frac{1}{2}\left(e^{imt} + e^{-imt}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{i(n+m)t} + e^{i(n-m)t} + e^{-i(n-m)t} + e^{-i(n+m)t}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right)$$

Date $f, g \in C_{2\pi}$, il loro prodotto di convoluzione é cosi definito

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds, \qquad \forall f, g \in C_{2\pi}$$

Proposizione. $f * g \in C_{2\pi} \quad \forall\, f, g \in C_{2\pi}$ e

(i) $f * g = g * f \quad \forall\, f, g \in C_{2\pi}$

(ii) $f \in C_{2\pi}, \quad P_N \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad f * P_N \in \mathcal{P}$.

Prova di (i). Cambiando variabile $t - s := \sigma$, troviamo $(f * g)(t) =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\sigma)g(t-\sigma)d\sigma = (g * f)(t) \qquad \text{perché} \quad h \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt = h(x+\pi) - h(x-\pi) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{x-\pi}^{x+\pi} h(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt.$$

Prova di (ii). Basta osservare che

$$(f * P_N)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) ds =$$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(nt-ns)ds + b_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(nt-ns)ds$$

e che $\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(nt-ns)ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)[\cos(nt)\cos(-ns) - \sin(nt)\sin(-ns)]ds = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\cos(nt) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds\right)\sin(nt);$
$\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(nt-ns)ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)[\sin(nt)\cos(-ns)+\sin(-ns)\cos(nt)]ds = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)ds\right)\sin(nt) - \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sin(ns)ds\right]\cos(nt)$

Approssimazione per convoluzione Siano $g_k \in C_{2\pi}$ tali che

(i) $g_k(t) \ge 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_k(t)dt = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$

(iii) $g_k \to_k 0$ uniformemente in $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi] \qquad \forall \delta \in (0,\pi)$

Allora $\qquad \|f * g_k - f\|_\infty \to_k 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}$

Prova. $\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta_\epsilon > 0, \quad \exists\, k(\delta,\epsilon): \qquad |s| \le \delta, \quad t \in [-\pi,\pi] \quad \Rightarrow$
$|f(t-s)-f(t)| \ \le\ 2\pi\,\epsilon$ e $\int_{s\ge\delta} g_k(s)\,ds \ \le\ 2\pi\,\epsilon$ e quindi

$k \ \ge k(\delta,\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |(f*g_k)(t)-f(t)| = \frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g_k(s)ds - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g_k(s)ds| \le$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s)-f(t)|\, g_k(s)\,ds \ +\ 2\|f\|_\infty\,\epsilon \quad \le\ \epsilon\,(1+2\|f\|_\infty)$$

ESEMPIO. $g_k = P_k(t) := (c_k)^{-1}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k, \qquad c_k = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt.$
Chiaramente vi é solo da provare (iii). Stimiamo c_k:

$$2\pi c_k = 2\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \ge 2\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t dt = \frac{4}{(k+1)}$$

Dunque, $\qquad \sup_{\delta\le|t|\le\pi} P_k(t) \le (c_k)^{-1}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \le \frac{\pi}{2}(k+1)\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \to_k 0$

I POLINOMI TRIGONOMETRICI SONO DENSI IN $C_{2\pi}(\mathbf{R})$

ogni $f \in C_{2\pi}$ é limite uniforme di successioni di polinomi trigonometrici:

ovvero $\mathcal{P}$ é denso in $C_{2\pi}$. Infatti, se $f \in C_{2\pi}$ e P_n sono come nell'esempio, i polinomi trigonometrici $f * P_n$ convergono uniformemente a f . Siccome allora anche i polinomi trigonometrici a coefficenti razionali sono densi in $C_{2\pi}$, si ha che

Corollario. $C_{2\pi}$ é separabile (ovvero ha un sottoinsieme numerabile denso)

$C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ ED I POLINOMI TRIGONOMETRICI COMPLESSI

$$\mathcal{I}_{2\pi} = \{f + ig| \quad f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad 2\pi - \text{periodiche, limitate e integrabili}\}$$
$$C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) := \{f + ig \in \mathcal{I}_{2\pi} : \quad f, g \in C_{2\pi}(\mathbf{R})\}$$

sono spazi vettoriali su $\mathbf{C}$. Se $h + ik \in \mathcal{I}_{2\pi}$, scriveremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} [h(t)+ik(t)]dt := \int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt+i \int_{-\pi}^{\pi} k(t)dt. \quad \text{Ad esempio} \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}.$$

$e_n := e^{int}, n \in \mathbf{Z}$ generano il sottospazio dei *polinomi trigonometrici complessi*

$$\mathcal{P}_{\mathbf{C}} := \{P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \qquad c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad a_n, b_n \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{Z}, \ N \in \mathbf{N}\}$$

$$P_N = \overline{P_N} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_{-m}} e^{imt} \quad \Leftrightarrow \quad a_{-n} = a_n, \ b_{-n} = -b_n \quad \forall n$$

Usando le formule di Eulero, vediamo che P_N é reale se e solo se si scrive nella forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = \sum_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}, \qquad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$$

In particolare, se P_N, Q_M sono due polinomi trigonometrici reali, allora $P_N + iQ_M$ é polinomio trigonometrico complesso. Dal Teorema di approssimazione per funzioni in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ segue quindi la

Densitá di $\mathcal{P}_{\mathbf{C}}$ in $C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$:

$$\forall f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \quad \exists P_N \in \mathcal{P}_{\mathbf{C}}, \quad \textit{tali che} \quad \|P_N - f\|_\infty \to_N 0$$

SPAZI VETTORIALI NORMATI

Un insieme V si dice **spazio vettoriale (o lineare)** su $\mathbf{R}$ se sono definite

$$\textit{una operazione di addizione} \qquad V \times V \to V, \quad (u,v) \to u+v$$

$$\textit{una moltiplicazione per scalari} \qquad \mathbf{R} \times V \to V, \quad (t,v) \to tv$$

tali che $(V,+)$ sia gruppo commutativo e risulti, per ogni $u,v \in V, \quad s,t \in \mathbf{R}$,

$$(t+s)u = tu + su, \quad t(u+v) = tu + tv, \quad t(sv) = (ts)v, \quad 1v = v$$

Gli elementi di V si chiamano punti o **vettori**. Nell'Appendice 3 si richiamano nozioni di algebra lineare, che useremo in seguito.

ESEMPIO: $\mathbf{R}^n$, con le operazioni

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) := (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n), \qquad t(x_1,\ldots,x_n) := (tx_1,\ldots,tx_n)$$

Interpretazione geometrica. Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy. In tale piano, dato $v = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, l'insieme

$$\mathbf{R}\, v := \{tv = (tx_0, ty_0) : \ t \in \mathbf{R}\}$$

é l'insieme dei punti della *retta (in forma) parametrica* $x = tx_0, \quad y = ty_0,$ retta che passa per l'origine $O := (0,0)$ (quando $t = 0$) e per v (quando $t = 1$); infatti, eliminando il *parametro* t , troviamo l'*equazione cartesiana* $y = \frac{y_0}{x_0}x$.

Similmente, $\{tv + u : \ t \in \mathbf{R}, v = (x_0,y_0), u = (x_1,y_1)\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per u e parallela alla retta $\mathbf{R}\, v$, ed infatti, eliminando il parametro, troviamo $y = (x - x_1)\frac{y_0}{x_0} + y_0$.

In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v. Tale interpretazione geometrica si estende al caso generale $n > 2$.

Altri esempi di spazi (e sottospazi) lineari

$\mathbf{R}^\infty = \mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$ (insieme di tutte le successioni numeriche) con

$$(\alpha+\beta)(j) := \alpha(j) + \beta(j) \quad \forall j \in \mathbf{N}, \quad (t\alpha)(j) := t\alpha(j) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$$

$l^\infty = \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty \mid \ \sup_n |\alpha(n)| < +\infty\} \qquad c_0 := \{\alpha \in l^\infty : \ \alpha(j) \to_j 0\}$

$l^1 = \{\alpha \in c_0 \mid \ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(n)| < +\infty\}$ (l^∞ é l'insieme di tutte le successioni numeriche *limitate*, l^1 é l'insieme di tutte le successioni numeriche *sommabili*) se $p > 0$, $\quad l^p := \{\alpha \in l^\infty : \quad \sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^p < +\infty\}$ (l^p é l'insieme delle *successioni di potenza p-esima sommabile*).

Allora $\quad l^p \subset c_0 \subset l^\infty \quad$ e sono sottospazi lineari di $\mathbf{R}^\infty$ (vedi Appendice 3).

$\mathbf{R}^{[a,b]} := \{f : [a,b] \to \mathbf{R}\}$ dotato delle operazioni

$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a,b], \quad (tf)(x) := tf(x) \qquad \forall t \in \mathbf{R}, x \in [a,b]$

$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbf{R}, f \text{ continua}\}$

$C_0(\mathbf{R})$, lo spazio delle funzioni continue su $\mathbf{R}$ aventi supporto compatto.

$C^k((a,b)), C^\infty((a,b)) \quad$ sono sottospazi vettoriali di $C((a,b))$.

Norme su spazi vettoriali, spazi normati

Sia V vettoriale. Una applicazione di V in $\mathbf{R}$, $v \to \|v\|$ si dice norma in V se

(i) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad$ e $\quad \|v\| = 0$ se e solo se $v = 0$, (**positivitá**)
(ii) $\|tu\| = |t|\,\|u\| \quad \forall u \in V,\ t \in \mathbf{R}$ (**positiva omogeneitá**)
(iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (**diseguaglianza triangolare**)

Uno spazio vettoriale V, dotato di una norma, si dice **Spazio Normato**

Esempi di norme, di spazi normati.

In $\mathbf{R}^n$. Se $p \geq 1$, $\quad \|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \qquad \|x\|_\infty := max_j |x_j|$
(vedi Appendice 3)

In l^∞, $\quad \|\alpha\| := \sup_n |\alpha_n| \quad$ é una norma, e c_0, l^p, in quanto sottospazi lineari, possono essere muniti della stessa norma.

Ma, se $p \geq 1$, in l^p cé una norma piú naturale: $\quad \|\alpha\|_p := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (vedi Appendice 3).

In $C([a,b])$: $\qquad \|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad$ e, se $p \geq 1$, $\quad \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$
(vedi Appendice 3).

APPENDICE 1

Per provare che, data $f \in C(\mathbf{R})$, esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[-R,R]$ quale che sia R, é sufficente provare che se $f(x)=0$ per $|x|\geq\frac{2}{3}$, allora esistono p_n polinomi tali che $\sup\limits_{|y|\leq\frac{1}{3}}|f(y)-p_n(y)|\to 0$.

Infatti, presa $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\varphi\equiv 1$ in $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$, $\varphi(x)=0$ se $|x|\geq\frac{2}{3}$, e posto $f_R(x):=\varphi(x)f(3Rx)$, é $f_R(x)=0$ se $|x|\geq\frac{2}{3}$, ed esistono allora polinomi p_n tali che

$$\sup_{|x|\leq\frac{1}{3}}|f_R(x)-p_n(x)|\to 0$$

e quindi $$\sup_{|y|\leq R}|f(y)-p_n(\tfrac{y}{3R})|=\sup_{|x|\leq\frac{1}{3}}|\varphi(x)f(3Rx)-p_n(x)|\to 0$$

Da ció segue infine che esistono polinomi $p_1,\dots,p_n,\dots$ tali che

$$\sup_{|x|\leq 1}|f(x)-p_1(x)|\leq 1,\ \dots,\ \sup_{|x|\leq n}|f(x)-p_n(x)|\leq\frac{1}{n}\dots$$

e quindi, fissato R, $\sup\limits_{|x|\leq R}|f(x)-p_n(x)|\leq\frac{1}{n}$ non appena $n\geq R$.

APPENDICE 2

1. Verifichiamo che, se $c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$, allora

$$P_N:=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}\equiv\overline{\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}}\quad\overset{(i)}{\Leftrightarrow}\quad a_{-n}=a_n,\quad b_{-n}=-b_n\quad\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$P_N=\sum_{n=0}^{N}a_n\cos nt+b_n\sin nt=a_0+\sum_{0<|n|\leq N}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{int}$$

$\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$: $P_N=\overline{P_N}\quad\Leftrightarrow\quad\sum\limits_{n=-N}^{N}c_ne^{int}=\sum\limits_{n=-N}^{N}\overline{c_n}e^{-int}\overset{-n:=m}{\equiv}\sum\limits_{m=-N}^{N}\overline{c_{-m}}e^{imt}\quad\Leftrightarrow$ $\overline{c_n}=c_{-n}\quad\Leftrightarrow\quad a_{-n}=a_n,\ \ b_{-n}=-b_n$ perché due polinomi sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficenti, ovvero $P_N\equiv 0\quad\Leftrightarrow\quad c_n=0\ \ \forall n$ e $P_N\equiv 0\quad\Leftrightarrow\quad c_m=<P_N,e_m>=0\quad\forall m\in\mathbf{Z}$.

$\overset{(ii)}{\Rightarrow}$: se $P_N=\sum\limits_{n=-N}^{N}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{int}$ é reale, e quindi $a_{-n}=a_n$, $b_{-n}=-b_n$, troviamo, usando le formule di Eulero, $P_N:=\sum\limits_{n=-N}^{N}\frac{a_n-ib_n}{2}[\cos nt+i\sin nt]=$

$$a_0+\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n-ib_n}{2}[\cos nt+i\sin nt]+\sum_{n=1}^{N}\frac{a_{-n}-ib_{-n}}{2}[\cos nt-i\sin nt]=$$

$$a_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n \cos nt + ia_n \sin nt - ib_n \cos nt + b_n \sin nt] +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n \cos nt - ia_n \sin nt + ib_n \cos nt + b_n \sin nt] = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$\overset{(ii)}{\Leftarrow}$: Usando anche qui le formule di Eulero, troviamo che

$$a_{-n} := a_n, \quad b_{-n} := -b_n \quad \Rightarrow \qquad P_N := a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \sum_{n=-1}^{-N} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{-int}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$$

$c_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, $N \in \mathbf{N}$. Scrivendo $c_n = a_n - ib_n$, le formule di Eulero danno

$$P_N = \sum_{n=-N}^{N} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] + i \sum_{n=-N}^{N} [a_n \sin nt - b_n \cos nt]$$

3. Osserviamo che $\quad f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad P_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad \Rightarrow$

$$(f * P_N)(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \left[c_n \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right] e^{int}$$

cioé la convoluzione di una $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ con un polinomio trigonometrico é un polinomio trigonometrico.

APPENDICE 3. RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

Combinazioni lineari e lineare indipendenza, sottospazi lineari, basi

1. Se $u, v \in V$ e $s, t \in \mathbf{R}$, $su + tv$ é **combinazione lineare** di u, v con coefficenti s, t. Dato $A \subset V$, scriveremo

$$< A >:= \text{insieme delle combinazioni lineari di elementi di } A.$$

Diremo che $v_j, j = 1, \ldots, p$ sono tra di loro linearmente indipendenti se

$$\sum_{j=1}^{p} t_j v_j = 0 \quad \Rightarrow \quad t_j = 0 \quad \forall j$$

2. $V_0 \subset V$ é **sottospazio lineare** se $u, v \in V_0, s, t \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad su + tv \in V_0$. Chiaramente $< A >$ é sottospazio lineare (generato da A).

Esempi. Siano

$$l^\infty := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \sup_j |\alpha(j)| < +\infty\}, \qquad c_0 := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \alpha(j) \to_j 0\}$$

$$\text{se } p > 0, \qquad l^p := \{\alpha \in \mathbf{R}^\infty : \quad \textstyle\sum_{j=1}^\infty |\alpha(j)|^p < +\infty\}$$

Allora, $\quad l^p \subset c_0 \subset l^\infty \quad$ e sono sottospazi lineari di $\mathbf{R}^\infty$.
Linearitá di l^p. Se $p > 1$, segue dalla convessitá di $f(t) = |t|^p$, giacché, per convessitá,

$$|\frac{a}{2} + \frac{b}{2}|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \qquad \forall a, b$$

che dá appunto $\alpha, \beta \in l^p \Rightarrow \alpha + \beta \in l^p$.
Se $p \leq 1$ segue invece dalla diseguaglianza $\quad |a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p, \quad$ che, vera se $a = 0$, é equivalente alla diseguaglianza $\quad f(x) := (1 + x)^p - (1 + x^p) \leq 0 \quad \forall x \geq 0$ (ottenuta dalla precedente dividendo per $a \neq 0$). Tale diseguaglianza é vera perché

$$f(0) = 0, \qquad f'(x) = p(1 + x)^{p-1} - px^{p-1} \leq 0 \quad \forall x \geq 0 \quad \text{e quindi}$$

$$(1+x)^p - (1+x^p) = f(x) \leq f(0) = 0 \quad \forall x \geq 0 \quad \textit{ovvero} \quad (1+x)^p \leq 1+x^p \quad \forall x \geq 0$$

3. Un sistema di vettori linearmente indipendenti $v_i : i = 1, \ldots, n$ che generino V si chiama **base** di V.

Ricordiamo che se V ha una base di n elementi, ogni altra base di V ha esattamente n elementi, e tale numero si chiama la **dimensione** di V.

Se v_j forma una base per V, allora ogni $v \in V$ si scrive, in modo unico, nella forma $v = \sum_{j=1}^n c_j v_j$. I numeri c_j si chiamano *componenti o coordinate* di v nella base v_j. Ad esempio, se $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é la base canonica di $\mathbf{R}^n$, un vettore x di $\mathbf{R}^n$ si scrive $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j e_j \quad$ (x_j = componenti o coordinate di x nella base e_j).

TRASFORMAZIONI LINEARI. Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbf{R}$.

$L : V \to W$ é lineare se $L(su + tv) = sL(u) + tL(v)$ $\forall u, v \in V, s, t \in \mathbf{R}$
L'insieme $L(V, W)$ delle trasformazioni lineari di V in W é spazio vettoriale.
$V^* := L(V, \mathbf{R})$, insieme delle **'forme' lineari** su V, é il **'duale algebrico'** di V.

Esempio 1. Sia $V = \mathbf{R}^n$, e_j base canonica di $\mathbf{R}^n$. L'applicazione

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = \pi_j(\sum_j x_j e_j) := x_j$$

é funzione (forma) lineare da $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$.
Inoltre, se l é forma lineare su $\mathbf{R}^n$ si ha $l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j x_j l(e_j)$, e quindi $l = \sum l(e_j)\pi_j$, ovvero π_j é base ('base duale') per $(\mathbf{R}^n)^*$.

1. $\Im L = L(V) = \{L(u) : \ u \in V\}$ e $KerL := \{v \in V : \ L(v) = 0\}$ sono sottospazi lineari rispettivamente di W, V.

2. Se $V =< v_1, \ldots, v_p >$, allora $L(V) =< L(v_1), \ldots, L(v_p) >$.

3. Se e_j é una base per V, allora una trasformazione lineare L di V in W é completamente determinata dai valori (peraltro arbitrari) $L(e_j)$. Infatti, se $v = \sum_j a_j e_j$, risulta $L(v) = \sum_j a_j L(e_j)$. Dunque, per assegnare una trasformazione lineare basta definirla su di una base, risultando prolungabile linearmente in modo unico su tutto lo spazio.

4. $0 \in KerL$; inoltre, $KerL = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ L é iniettiva.

Infatti $L(0) = L(0 + 0) = L(0) + L(0) \Rightarrow L(0) = 0$. In particolare, se L é iniettiva, deve essere $KerL = \{0\}$. Viceversa, se $KerL = \{0\}$, allora $L(u) = L(v) \Rightarrow L(u - v) = 0 \Rightarrow u - v \in KerL \Rightarrow u = v$.

5. L iniettiva, u_j linearmente indipendenti $\Rightarrow L(u_j)$ linearmente indipendenti.
Infatti, $\sum_j a_j L(u_j) = 0 \Rightarrow L(\sum_j a_j u_j) = 0 \Rightarrow \sum_j a_j u_j = 0 \Rightarrow a_j = 0 \quad \forall j$.

6. Se V, W, Y sono spazi vettoriali e $L \in L(V, W)$, $U \in L(W, Y$ allora $U \circ L \in L(V, Y)$.

7. Se L é biiettiva (ovvero invertibile), cioé $\ker L = \{0\}$ e $\Im L = W$, allora la funzione inversa L^{-1} é anch'essa lineare.
Infatti, dati $w_j \in W$, $w_j = L(v_j)$, da $\sum_j a_j w_j = L(\sum_j a_j v_j)$, segue $L^{-1}(\sum_j a_j w_j) = L^{-1}(L(\sum_j a_j v_j)) = \sum_j a_j v_j = \sum_j a_j L^{-1}(w_j)$.

Definizione Una $L \in L(V,W)$ biiettiva si chiama **isomorfismo lineare** e V e W si dicono (algebricamente) **isomorfi.**

Proposizione Sia V spazio vettoriale di dimensione n. Uno spazio vettoriale W é isomorfo a V se e solo se ha dimensione n.
Infatti, se L é isomorfismo da V a W ed e_j é base per V, allora $f_j := L(e_j)$ sono linearmente indipendenti e generano $W = L(V)$.
Viceversa, se $dimW = dimV = n$ e $e_j, f_j, j = 1, \ldots, n$ sono basi di V, W, la trasformazione lineare che manda e_j in f_j é l'isomorfismo cercato.

Esempio 2. Sia $V = C^\infty(\mathbf{R}) = W$. La trasformazione D che manda $f \in V$ nella sua derivata, $D(f) := f'$ é chiaramente lineare (da V in se), con $KerD$ dato dalle funzioni costanti. Siccome ogni funzione continua é dotata di primitiva, D é suriettivo. Ma, indicato con V_0 il sottospazio di V formato dalle funzioni che si annullano in $x = 0$, $D_{|V_0}$, cioé la restrizione di D a V_0, é un isomorfismo tra V_0 e V.
Chiaramente $(D_{V_0})^{-1}(g) = \int\limits_0^x g$.
Esempio 3. Data $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$ matrice $m \times n$ (m righe ed n colonne),

$$L_\mathcal{A}(x) := \mathcal{A}x = (\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j) \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

é funzione (o trasformazione) lineare da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$. Il suo nucleo é l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo di m equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \qquad i = 1 \ldots, m$$

$\Im L_\mathcal{A} = \{y \in \mathbf{R}^m : \exists x \in \mathbf{R}^n, \mathcal{A}x = y\}$ é il sottospazio lineare di $\mathbf{R}^m$ generato dai vettori $f_j := L_\mathcal{A}(e_j)$, se $e_j, j = 1, \ldots, n$ base (canonica) di $\mathbf{R}^n$; gli f_j sono le colonne di $\mathcal{A}$. Quindi la dimensione di $\Im L_\mathcal{A}$ é pari al rango di $\mathcal{A}$.

Matrice rappresentativa. Viceversa, se $e_i, i = 1, \ldots, n$, $f_j, j = 1, \ldots, m$ sono basi di V, W, rispettivamente, *ogni trasformazione lineare da V a W si rappresenta mediante una matrice $m \times n$.*
Sia infatti L trasformazione lineare da V a W. Siano, per ogni j, a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$ le componenti di Le_j nella base f_i, cioé

$$Le_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}f_i$$

Allora, se $\quad u = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \quad$ e $\quad v := L(u) = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i, \quad$ si ha

$$v = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i = Lu = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \right) f_i$$

ovvero, se $y = (y_1, \ldots, y_m),\ x = (x_1, \ldots, x_n)$, posto $\mathcal{A}_L := (a_{ij})$, si ha $\quad y = \mathcal{A}_L x$
Cioé, identificando u ed Lu con le loro coordinate x ed y, L opera su x come $\mathcal{A}_L$, che si chiama quindi matrice rappresentativa di L nelle basi date.