AM120 2014-2015: I Settimana

DERIVAZIONE

1. Derivabilitá e derivata Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$; f si dice derivabile in x_0 se esiste, finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

In tal caso tale limite si chiama derivata di f in x_0 e si scrive $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $(Df)(x_0)$. Se $f'(x)$ esiste $\forall x \in A$, la $A \ni x \to f'(x)$ é la '(funzione) derivata' di f in A.

Esempi

Se $f(x) = c \ \ \forall x$, allora $f'(x) = 0$, $\forall x$. Infatti, $\frac{f(x)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} \equiv 0$.

Se $f(x) = e^x$, é $f'(x) = e^x$. Infatti $\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h-1}{h}\right) \to_{h\to 0} e^x$.
Allo stesso modo: $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

Se $f(x) = \log x$, é $f'(x) = \frac{1}{x}$. Infatti $\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} \to_{h\to 0} \frac{1}{x}$.

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, é $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Infatti $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = -\frac{1}{xx_0} \to_{x\to x_0} -\frac{1}{x_0^2}$.

Se $f(x) = \sin x$, é $f'(x) = \cos x$. Infatti $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$

$$\frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \to_{h\to 0} \cos x$$

Se $f(x) = \cos x$, é $f'(x) = -\sin x$. Infatti $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} =$

$$\frac{\cos x \cos h - \sin h \sin x - \cos x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \to_{h\to 0} -\sin x$$

(i) La funzione $f(x) = |x|$ non é derivabile in $x = 0$. (ii) Se $f(x) := x^2 \chi_{\mathbf{Q}}(x)$, $f'(0) = 0$ ed $f'(x)$ non esiste se $x \neq 0$ ($\chi_{\mathbf{Q}} \equiv 1$ in $\mathbf{Q}$, $\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}} \equiv 0$).

NOMENCLATURA Ricordiamo che una funzione $w : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$ si dice infinitesima in x_0, e si scrive $w(x) = \circ(1)$ in x_0 se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_\epsilon : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |w(x)| \leq \epsilon$, ovvero se w tende a zero al tendere di x a x_0.
Si dice anche che w é un infinitesimo rispetto ad h (o di ordine superiore al primo) in zero, e si scrive $w = \circ(h)$, se $\lim_{h\to 0} \frac{w(h)}{h} = 0$, ovvero se $w(h) = \circ(1)h$.

2. Continuitá e differenziabilitá delle funzioni derivabili

Se f **è derivabile in** x_0 , allora f é differenziabile in x_0, ovvero

$$R(x) := f(x_0 + h) - [f(x_0) + f'(x_0)h] = \circ(h)$$

In particolare f **è continua in** x_0. La funzione lineare di $\mathbf{R}$ in se,

$$df(x_0) : h \to f'(x_0)h$$

si chiama **differenziale** di f in x_0. Notiamo che $df(x_0)$ é l'unica funzione lineare che approssima $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo. Infatti

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h \circ (1) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}[a + \circ(1)] = a$$

3. Derivate di somme, prodotti...

(somme e prodotti) Se f, g sono derivabili in x_o, allora lo sono anche $f+g$, fg, e

$$(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o)$$
$$(fg)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_0)$$

Infatti,

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \to_{x\to x_0} f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left[g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right] =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Esempio. 1. Se $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. Prova: per induzione.
2. Ricordiamo che $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Si ha:
$(\sinh x)' := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ $\qquad (\cosh x)' = \sinh x$.

Piú avanti proveremo la formula

(quozienti) Se f, g sono derivabili in x_o e $g(x_0) \neq 0$ allora lo é anche $\frac{f}{g}$ e

$$(\frac{f}{g})'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_0)}{g^2(x_o)}$$

Esempi.

$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

$D\tanh x = D\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1-\tanh^2 x$

4. Derivata di funzioni composte: la regola della catena

Se g é derivabile in x e f é derivabile in $g(x)$, allora $f\circ g$ é derivabile in x e

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Prova. Usando prima la differenziabilitá di g e poi quella di f, troviamo

$f(g(x+h)) = f(g(x)+g'(x)h+\epsilon_1(h)) = f(g(x))+f'(g(x))[g'(x)h+\epsilon_1(h)]+\epsilon_2(k(h))$

ove $\quad \epsilon_1(h) = \circ(h),\ k(h) = g'(x)h+\epsilon_1(h),\ \epsilon_2(k) = \circ(k)$. Siccome

$$\lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = g'(x) \quad \text{e quindi} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\epsilon_2(k(h))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\epsilon_2(k(h))}{k(h)}\ \lim_{h\to 0}\frac{k(h)}{h} = 0$$

concludiamo che $\quad f(g(x+h)) = f(g(x))+f'(g(x))g'(x)h+\circ(h)$.

$$\textit{Esempi.} \qquad (\frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2} \qquad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2} \qquad (f^n)' = nf^{n-1}f'$$

$$(e^f)' = f'e^f \qquad (\ln f)' = \frac{f'}{f} \qquad D\sin(f(x)) = \cos(f(x))Df(x)$$

Sia $\ f>0$. $\ (f^g)' = (e^{g\log f})' = f^g(g\log f)'\ $ e quindi, se $g :\equiv \alpha$, $\ (f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1}f'$

5. Funzione inversa: derivabilitá e derivata

Sia f iniettiva in (a,b), $f^{-1}: f((a,b))\to(a,b)$ la funzione inversa. Allora:

(i) se f é continua in (a,b), f^{-1} é continua in $f((a,b))$

(ii) se f é derivabile in x, con $f'(x)\neq 0$ allora f^{-1} é derivabile in $y=f(x)$

$$e \qquad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Prova

(i) Continuitá: da f continua e iniettiva in (a, b) segue che f é strettamente monotona in (a, b), diciamo strettamente crescente; ma allora, fissato $y_0 = f(x_0)$ $x_0 \in (a, b)$, $\epsilon > 0$ tale che $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a, b)$, risulta $f^{-1}((f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)))$ $= f^{-1}(f((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon))) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ e quindi f^{-1} é continua in y_0.

(ii) Derivabilitá. Se h é piccolo, da $k = k(h) := f^{-1}(y + h) - f^{-1}(y) \to 0$ per $h \to 0$ e dalla derivabilitá di f in $x = f^{-1}(y)$, segue

$$y+h = f(f^{-1}(y+h)) = f(f^{-1}(y)+k) = f(f^{-1}(y)) + [f'(f^{-1}(y)) + \epsilon(k)]k, \quad \epsilon(k) \to_{k\to 0}$$

e quindi, dividendo per h, e dato che $h \to 0 \Rightarrow k(h) \to 0 \Rightarrow \epsilon(k(h)) \to 0$, troviamo

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{h\to 0} \frac{k}{h} = \lim_{h\to 0} [f'(f^{-1}(y)) + \epsilon(k)]^{-1} = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

Alcune funzioni inverse e le loro derivate

Se $f(x) = x^n, x > 0$, la sua inversa, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}, x > 0$ ha per derivata

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Piú brevemente, da $x = f(f^{-1}(x))$ e dalla regola della catena, si ottiene

$$e^{\ln x} = x \quad \Rightarrow \quad 1 = e^{\ln x}(\ln x)' = x \ln x \quad \Rightarrow \quad (\ln x)' = \tfrac{1}{x}$$

$$f(x) = \tan x, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \quad f^{-1}(x) = \arctan x \quad \Rightarrow$$

$$1 = D\tan(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad D\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

$f(x) = \sin x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad f^{-1}(x) = \arcsin x \quad \Rightarrow$

$1 = D\sin(\arcsin x) = \cos(\arcsin x) D\arcsin x = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \quad \Rightarrow$

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{Allo stesso modo:} \quad D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$1 = (\sinh(\sinh^{-1} x))' = \cosh(\sinh^{-1} x))(\sinh^{-1} x)' \Rightarrow$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\sinh^{-1} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}. \quad \text{Allo stesso modo:}$$

$$1 = (\cosh(\cosh^{-1} x))' = \sinh(\cosh^{-1} x))(\cosh^{-1} x)' = (\cosh^{-1} x)'\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1} x) - 1}$$

$$\Rightarrow \qquad (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

6. Derivata a destra, a sinistra

Sia $\quad f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$.
Se esiste il limite, a destra, del rapporto incrementale:

$$f'_+(x_0) := \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

chiameremo tale limite 'derivata a destra di f in x_0'. Analogamente si definisce (se esiste) la derivata a sinistra, indicata $f'_-(x_0)$, . Evidentemente f **é derivabile in x_0 se e solo se f ha derivate finite a destra e sinistra e queste sono uguali**.

Esempi.

Se $\quad f(x) = |x| \quad f'_+(0) = 1, \quad f'_-(0) = -1$.

Se $\quad f(x) = \sqrt{|x|} \quad f'_+(0) = +\infty, \quad f'_-(0) = -\infty$.

7. Funzioni di classe C^1

Sia A aperto (cioé $\forall x \in A \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta \subset A)$. Una f si dice derivabile in A se é derivabile in ogni punto di A. Resta in tal caso definita in A una nuova funzione, la funzione derivata prima, f'. Se poi $f' \in C(A)$, ovvero f' é continua in A, si scrive $f \in C^1(A)$ e si dice che f é di classe C^1 in A.

Una funzione derivabile non é in generale C^1. Ad esempio

$$f(x) := x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad se \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0$$

é derivabile con derivata nulla in $x = 0$ perché $\quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = 0$ mentre

$$\frac{d}{dx}[x^2 \sin\frac{1}{x}] = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

non ha limite per x tendente a zero.

COMPLEMENTI ED ESERCIZI

La funzione esponenziale

Ricordiamo che

$$2 < a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < 4$$

ed a_n, b_n sono, rispettivamente, strettamente crescente/decrescente, e, siccome $\frac{a_n}{b_n} \to_n 1$, a_n, b_n ammettono entrambe limiti finiti e tali limiti coincidono. Tale comune limite é il numero di Nepero e:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow_n \quad e \quad \swarrow_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Esercizio. Provare, con argomenti di monotonia, che $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to_n e^x \quad \forall x \in \mathbf{Q}$.

Lemma. $|e^x - e^y| \le 6\, e^M\, |x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbf{Q},\ x, y \le M, \quad |x-y| \le 1.$

Infatti, $t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbf{N}: \quad t \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \quad \Rightarrow$

$$0 < e^t - 1 \le e^{\frac{1}{n}} - 1 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}} - 1 \le (1+\frac{1}{n})^2 - 1 \le \frac{3}{n} \le \frac{6}{n+1} \le 6t$$

e quindi, supposto, come lecito, che $y \le x$, troviamo $0 \le e^x - e^y = e^y(e^{x-y}-1) \le 6e^M(x-y)$ se $x - y \le 1$.

Da ció segue che la funzione e^x, $x \in \mathbf{Q}$ é uniformemente continua in $(-\infty, M]$ per ogni M ed é quindi prolungabile con continuitá sulla chiusura di $\mathbf{Q}$, cioé su tutto $\mathbf{R}$.

ESERCIZIO. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ É (binomio di Newton!)

$(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k-1)\ldots n}{(n-k)!n\, n\ldots n} < 1$

e quindi $$\limsup_n (1+\frac{1}{n})^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Viceversa, $n > n_0 \quad \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n > \sum_{k=0}^{n_0} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n^k} \quad \Rightarrow \quad \liminf_n (1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!},\ \forall n_0$

perché $\frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = (1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\,\ldots(1-\frac{k-1}{n}) \to_n 1.$ Quindi

$$\liminf_n (1+\frac{1}{n})^n \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Una rappresentazione della funzione esponenziale

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbf{Q}$$

Per il criterio del rapporto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge assolutamente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Detta $s(x)$ la somma di tale serie, proviamo che $s(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbf{Q}$. Ció sará conseguenza della

Prop. $s(x+y) = s(x) \times s(y) \qquad \forall\, x,\, y\, \in \mathbf{R}$.

che a sua volta é conseguenza del

Lemma (Prodotto secondo Cauchy).

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{j+k=n} x_j\, y_k| < +\infty \qquad e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j+k=n} x_j\, y_k) \;=\; (\sum_{n=0}^{\infty} x_n)\; (\sum_{n=0}^{\infty} y_n)$$

Infatti : $\quad s(x+y) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \overset{binomio\ di\ Newton}{===} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{n!} \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!}\, x^j\, y^k) \;=$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{j+k=n} \frac{x^j}{j!}\, \frac{y^k}{k!}) \;=\; (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!})\, (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}) \;=\; s(x) \times s(y)$$

Deduciamo ora dalla Proposizione che $e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbf{Q}$. Dalla Prop.:

$$s(1) = e \quad \Rightarrow \quad s(n) = s(\sum_{j=1}^{n} 1\,) \;=\; \prod_{j=1}^{n} s(1) =\; e^n \qquad \forall\, p \in \mathbf{N}$$

Per la stessa ragione

$$[s(\frac{1}{n})]^n = s(1) = e \quad \Rightarrow \quad s(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}} \quad \text{e quindi} \quad s(\frac{m}{n}) = [e^m]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{m}{n}}$$

Dunque $e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbf{Q}$ e l'uguaglianza si estende a tutto $\mathbf{R}$ per la densitá di $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{R}$ e per la continuitá di e^x, $x \in \mathbf{R}$ e di $s(x)$ (cosa questa che vedremo piú avanti).

Prova del Lemma

Siano $\quad s_N := \sum_{n=0}^{N} z_n, \qquad \sigma_N := \sum_{n=0}^{N} w_n$

$$p_N := \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{j+k=n} z_j\, w_k \Big) =$$

$$= z_0\, w_0 + (z_0\, w_1 + z_1\, w_0) + \ldots + (z_0\, w_N + z_1\, w_{N-1} + \ldots + z_{N-1}\, w_1 + z_N\, w_0) =$$

$$= z_0\,(w_0 + w_1 + \ldots + w_N) + z_1\,(w_0 + \ldots + w_{N-1}) + \ldots + z_N\, w_0$$

Dunque

$$|s_N\, \sigma_N - p_N| =$$

$$|z_0(w_0+\ldots+w_N)+z_1(w_0+\ldots+w_N)+\ldots+z_{N-1}(w_0+\ldots+w_N)+z_N(w_0+\ldots+w_N)-$$

$$[z_0\,(w_0 + w_1 + \ldots + w_N) + z_1\,(w_0 + \ldots + w_{N-1}) + \ldots + z_{N-1}(w_0 + w_1) + z_N\, w_0]| =$$

$$= |z_1\, w_N + z_2(w_{N-1} + w_N) + \ldots + z_{N-1}(w_2 + \ldots + w_N) + z_N\,(w_1 + \ldots + w_N)| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \Big[|z_j|\, |\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}| \Big] + \sum_{j=n+1}^{N} \Big[|z_j|\, |\sum_{i=1}^{j} w_{N-j+i}| \Big] \le$$

$$\le \Big[\sum_{j=1}^{n} |z_j| \Big] \Big[\sum_{k=N-n+1}^{\infty} |w_k| \Big] + \Big[\sum_{j \ge n+1} |z_j| \Big] \Big[\sum_{k=1}^{\infty} |w_k| \Big] \qquad n := [\frac{N}{2}].$$

Da

$$\sum_{k=N-[\frac{N}{2}]+1}^{\infty} |w_k| \to_{N \to +\infty} 0, \sum_{j \ge [\frac{N}{2}]+1} |z_j| \to_{N \to +\infty} 0 \qquad \sum_j |z_j| < +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} |w_k| < \infty$$

segue $\quad |s_N\, \sigma_N - p_N| \to_{N \to +\infty} 0 \quad$ e quindi $\quad \lim_N p_N = \lim_N s_N\, \sigma_N.$