1 minimi e massimi di variabili aleatorie

Esercizio 1.
Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. con densità:

$$f_X(x) = x^{-2} 1_{(1,\infty)}(x)$$

Ponete $Y = min[X_1, ..., X_n]$. Esiste $E[X_1]$? Se si trovatelo. Esiste $E[Y]$? Se si trovatelo.

Esercizio 2.
Sia $\{X_i\}_{i=1}^n$ una successione di v.a. con funzione di densità:

$$f_X(x, \theta) = \frac{3x^2}{\theta^3} 1_{[0,\theta]}(x)$$

Sia $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$, dimostrare che Y_n ha densità: $f_{Y_n}(y, \theta) = \frac{3ny^{3n-1}}{\theta^{3n}} 1_{[0,\theta]}(y)$.

Esercizio 3.
Sia $X_1, X_2, ..., X_n$ un campione casuale dalla distribuzione Uniforme sull'intervallo di ampiezza a centrato in θ. Siano $Y_1 = min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ e $Y_n = max\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Determinare le distribuzioni di Y_1 e Y_n.

Esercizio 4.
Si supponga che la lunghezza di vita in ore di una lampadina prodotta da una compagnia A sia indicata da una v.a. X distribuita come $N(800, 14.400)$. Sia Y la vita in ore di una lampadina prodotta dalla compagnia B una v.a. distribuita come una $N(850, 2500)$. Una lampadina viene selezionata a caso da ogni compagnia e lasciata accesa fino alla sua rottura.

1. Trovare la probabilità che il tempo di vita della lampadina selezionata dalla compagnia A superi la vita della lampadina della compagnia B di 15 ore.

2. Trovare la probabilità che almeno una lampadina viva almeno 920 ore.

Esercizio 5.

Sia $\{X_i\}_{i=1}^n$ una successione di v.a. con funzione di densità:
$f_X(x,\theta) = \frac{3x^2}{\theta^3} 1_{[0,\theta]}(\mathrm{x})$
Sia $Y_n = max\{X_1, ..., X_n\}$, dimostrare che Y_n ha densità:
$f_{Y_n}(y,\theta) = \frac{3ny^{3n-1}}{\theta^{3n}} 1_{[0,\theta]}(y)$

2 Campionamento

2.1 Legge debole dei grandi numeri e Teorema del limite centrale

Esercizio 1.
$X_1, ..., X_n$ campione casuale con $\sigma^2 = 1$. Determinare il minimo valore di n t.c. $P(|\bar{X} - \mu| < 0,5) > 95\%$

Esercizio 2.
Un ricercatore vuole stimare la media di una popolazione usando un campione grande abbastanza da avere una probabilità del 95% che la media campionaria non differirà dalla media della popolazione di più del 25% della deviazione standard. Quale dovrebbe essere l'ampiezza del campione?

Esercizio 3.

Se una popolazione ha $\sigma = 2$ e se $\bar{X}$ è la media dei campioni di ampiezza 100, trovate i limiti entro i quali sarà compreso $\bar{X} - \mu$ con probabilità 90%. Usate sia la disuguaglianza di Tchebycheff che il teorema del limite centrale. Perchè i due risultati sono diversi?

Esercizio 4.
Una macchina imbottigliatrice scarica in media μ cl per bottiglia. La di-

stribuzione del liquido scaricato per bottiglia é una Normale con $\sigma = 1$. Si consideri un campione di 10 bottiglie scelte a caso.

1. Trovare la probabilità che la media campionaria disti da μ meno di $0,3$.

2. Si consideri S^2, si calcolino a_1 e a_2 t.c. $P(a_1 \leq S^2 \leq a_2) = 0,9$.

2.2 Campionamento dalla distribuzione Normale

Esercizio 1.
Siano $X_1, ..., X_n$ variabili casuali estratti da una Normale Standard, determinare la distribuzione di:

1. $U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$
   .

2. $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$
   Per il teorema 6.8 a pag. 252 del testo si ha che $\bar{X} \sim N(0, \frac{1}{n})$

3. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Esercizio 3.
Siano $X_1, ..., X_n$ variabili casuali estratte da $N(\mu, \sigma^2)$

1. Calcolare usando la f.g.m. la distibuzione di $X_1 + X_2$ e $X_2 - X_1$.

2. Calcolare la distribuzione di $\bar{X}$.

3. Calcolare la distribuzione di $U = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$.

Esercizio 4.

Sia X_1, X_2 un campione casuale estratto da $N(0, 1)$. Usando i risultati del paragrafo 6.4 rispondete alle seguenti domande:

1. Qual è la distribuzione di $(X_2 - X_1)/\sqrt{2}$?

2. Qual è la distribuzione di $(X_2 + X_1)/\sqrt{(X_1 - X_2)^2}$?

Esercizio 5.

Se $X_1, ..., X_n$ è un campione casuale da $N(\mu, \sigma^2)$, trovate la media e la varianza di: $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$

$E[S] = E[\sqrt{\frac{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}] = E[\sqrt{S^2}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E[\sqrt{U}]$

dove $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

Ora $E[\sqrt{U}] = \int_0^{+\infty} (\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}} u^{1/2} \frac{u^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-u/2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2} u^{n/2-1} e^{-u/2}}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n-1}{2})} du = \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$ quindi

$E[S] = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$.

Si ragiona in modo analogo per calcolare la varianza:

$Var(S) = \frac{\sigma^2}{n-1} Var(\sqrt{U})$

Ora $Var(\sqrt{U}) = E[U] - E[\sqrt{U}]^2 = (n-1) - 2(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})})^2$

Allora $Var(S) = \frac{\sigma^2}{n-1}\{(n-1) - 2(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})})^2\}$

Esercizio 6.

Calcolare le seguenti probabilità con l'aiuto delle tavole, supponendo che $n = 10$ e $\sigma^2 = 1$:

1. Trovare a_1 e a_2 t.c. $P(a_1 < S^2 < a_2) = 0,9$
   $P(a_1 < S^2 < a_2) = P(\frac{a_1(n-1)}{\sigma^2} < \frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} < \frac{a_1(n-1)}{\sigma^2}) = P(9a_1 < U <$

$9a_2) = 0,9$ dove $U \sim \chi^2_{n-1}$
Supponendo di dividere in modo equo l'area a sinistra di a_1 e a destra di a_2 si ottiene dalle tavole che: $P(U < 9a_1) = 0,05$ da cui $9a_1 = 3,33$ quindi $a_1 = 0,37$ e $P(U < 9a_2) = 0,95$ da cui $9a_2 = 16,9$ quindi $a_2 = 1,87$

2. Trovare q_1 e q_2 t.c. $P(q_1 < \frac{\bar(X) - \mu}{S/\sqrt{n}} < q_2) = 0,95$
   $P(q_1 < \frac{\bar(X) - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2) = P(q_1 < Z < q_2) = \Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 0,95$ dove $Z \sim N(0,1)$
   Dalle tavole otteniamo $\Phi(q_2) = 0,975$ quindi $q_2 = 1,96$ e $\Phi(q_1) = 0,025$ quindi $q_1 = z_{0,025}$ poichè la Gaussiana è simmetrica $q_1 = -q_1$.