Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM210

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Andrea Nardi

Tutorato 2 - 15 Ottobre 2013

1. Studiare l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilitá, nell'origine, delle seguenti funzioni:

   - $n(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - $i(x,y) = \begin{cases} y^{\frac{4}{3}} \sin\left(\frac{1}{x^4+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - $a(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - $g(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^2z^2}{x^4+y^4+z^4} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$
   - $r(x,y) = \sqrt{|xy|}$
   - $@(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - $d(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   - $y(x,z) = \begin{cases} xz^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x,z) \neq (0,0) \\ 0 & (x,z) = (0,0) \end{cases}$

2. Siano
$$f(x,y) = x^2 \log(1 + x^2y^2),$$
$$g(t) = (e^t, t).$$
Verificare che:
$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = \langle \nabla f(g(t)), g'(t) \rangle .$$

3. Siano
$$g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow (xy, ze^x) \in \mathbb{R}^2,$$
$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow (x^2 + y, \frac{y}{x^2+1}, x + y) \in \mathbb{R}^3.$$
Calcolare $J_{g \circ f}$ verificando la regola della catena.

4. Discutere, al variare del parametro $\alpha > 0$, l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilitá nell'origine di
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{(x^6+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Esibire un esempio di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ che nell'origine sia:
   (a) Continua, parzialmente derivabile, ma derivabile non in tutte le direzioni;
   (b) Continua, ma non parzialmente derivabile e derivabile non in tutte le direzioni;
   (c) Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione, ma discontinua;
   (d) Parzialmente derivabile, ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.