AM210-2013/14: Tracce delle lezioni-VIII Settimana

SERIE DI FOURIER

Abbiamo visto che i polinomi trigonometrici sono densi in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$. Speciali limiti di successioni di polinomi trigonometrici sono dati dalle *serie trigonometriche*:

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt, \qquad a_n, b_n \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Se tale serie converge (per ogni t), la sua somma $f(t)$, evidentemente funzione 2π periodica, é anche continua *se la convergenza é uniforme*, il ché di certo accade se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$$

In tal caso si vede subito che i coefficenti a_n, b_n sono determinati in modo unico da $f(t)$. Moltiplicando infatti la serie per $\cos mt$ ed intengrando termine a termine si trova $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\ dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt\ ]\ \cos mt\ dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [a_n \cos nt\ \cos mt + b_n\ \sin nt\ \cos mt]\ dt = a_m$ perché $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nt\ \cos mt\ dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(n+m)t + \cos(n-m)t) = 0$ se $m \neq n$ mentre $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\ dt \overset{nt:=\tau}{=} \frac{1}{n} \int\limits_{-n\pi}^{n\pi} \cos^2 \tau d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \tau d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nt dt = \pi$ se $m \in \mathbf{N}$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = 2\pi a_0$. Analogamente se si moltiplica f per $\sin mt$ e si integra termine a termine. Dunque

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt dt \quad \forall m \geq 1$$

Tali numeri si chiamano *coefficenti di Fourier* di f e possono ovviamente essere definiti per ogni $f \in C_{2\pi}$ (od anche solo assolutamente integrabile) e la serie risultante

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \cos nt \right) \cos nt\ dt + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \sin nt \right) \sin nt\ dt$$

si chiamerá *serie di Fourier* della f. Si pongono in modo naturale due problemi:

- *f é determinata in modo unico dai suoi coefficenti di Fourier??*
- *la serie di Fourier di f converge (se converge!) ad f?*

Daremo qualche risposta nel quadro, piú generale (e piú comodo) delle funzioni periodiche a valori in $\mathbf{C}$.

Lo spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ ed i polinomi trigonometrici (complessi)

$$\mathcal{I}_{2\pi} = \{f+ig| \quad f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, \quad 2\pi - \text{periodiche, limitate e integrabili}\}$$

é spazio vettoriale su $\mathbf{C}$, $\quad C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) := \{f+ig \in \mathcal{I}_{2\pi}: \quad f,g\in C_{2\pi}(\mathbf{R})\}$.
Se $h+ik\in\mathcal{I}_{2\pi}$, scriveremo $\quad \int_{-\pi}^{\pi}[h(t)+ik(t)]dt := \int_{-\pi}^{\pi}h(t)dt + i\int_{-\pi}^{\pi}k(t)dt.$

Esempio: $\quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 0 \quad \forall n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$. $\quad$ In $\quad \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ $\quad$ sono definite le norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{R}}|f(t)| = \sup_{t\in[-\pi,\pi]}|f(t)|, \qquad \|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt\right)^{1/2} =< f,f >^{1/2}$$

$$\text{ove} \qquad < f,g >:= \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g}(t)dt \qquad \text{é un prodotto scalare:}$$

$$< g,f >= \overline{< f,g >}$$

$$< \lambda f,g >= \lambda < f,g >, \quad < f,\lambda g >= \overline{\lambda} < f,g > \quad \forall\lambda\in\mathbf{C}, \quad \forall f,g\in\mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$$

Continua a valere Cauchy-Schwartz (e quindi $\|f\|_2$ é effettivamente una norma), come si vede sciegliendo $\lambda =< f,g > \|g\|^{-2}$ nella diseguaglianza

$$0 \le < f-\lambda g, f-\lambda g >= \|x\|^2 + |\lambda|^2 - \lambda < y,x > -\overline{\lambda} < x,y >$$

E vale anche Pitagora: $\quad < f,g >= 0 \quad \Rightarrow \quad \|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$. $\quad$ Le funzioni

$e_n := e^{int}, n\in\mathbf{Z}$ $\quad$ formano un *sistema ortonormale* in $\quad (\mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}), \|.\|_2)$:

$$< e_n,e_m >= 0 \quad \text{se} \quad n\ne m, \quad < e_n,e_n >= 1 \quad \forall n\in\mathbf{Z}$$

In particolare,
$$\|\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$$

Diseguaglianza di Bessel. Sia $f\in\mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |< f,e_n >|^2 \le \|f\|_2^2$$

Infatti, per Pitagora $\quad < \left[f - \sum_{n=-N}^{N} < f,e_n > e_n\right], \sum_{n=-N}^{N} < f,e_n > e_n >= 0 \quad \Rightarrow$

$$\|f\|_2^2 = \|f - \sum_{n=-N}^{N} < f,e_n > e_n\|_2^2 + \|\sum_{n=-N}^{N} < f,e_n > e_n\|_2^2 \ge \sum_{n=-N}^{N} |< f,e_n >|^2$$

Gli e_n generano il sottospazio $\mathcal{P}$ dei *polinomi trigonometrici complessi*:

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \qquad c_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad a_n, b_n \in \mathbf{R}, \ n \in \mathbf{Z}, \ N \in \mathbf{N}$$

$$P_N \quad \text{é reale} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}} = \sum_{m=-N}^{N} \overline{c_{-m}} e^{imt} \quad \Leftrightarrow \quad a_{-n} = a_n, \ b_{-n} = -b_n \quad \forall n$$

Usando le formule di Eulero, vediamo che P_N é reale se e solo se si scrive nella forma:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = a_0 + \sum_{0<|n|\le N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}, \qquad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$$

In particolare, se P_N, Q_M sono due polinomi trigonometrici reali, allora $P_N + iQ_M$ é polinomio trigonometrico complesso. Dal Teorema di approssimazione per funzioni in $C_{2\pi}(\mathbf{R})$ segue quindi la

Densitá di $\mathcal{P}$ in $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) := \{f + ig \in \mathcal{I}_{2\pi} : \quad f, g \in C_{2\pi}(\mathbf{R})\}$

$$\forall f \in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})} \quad \exists P_N \in C_{2\pi(\mathbf{R},\mathbf{C})}, \quad \text{polinomi trigonometrici:} \quad \|P_N - f\|_\infty \to_N 0$$

Corollario (Principio di identitá) Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Allora

$$< f, e_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

Infatti, siano P_N polinomi trigonometrici tali che $\|P_N - f\|_\infty \to_N 0$ e quindi $\|P_N - f\|_2 \to_N 0$ e quindi $< f, P_N > \to \|f\|_2^2$. Ma $< f, e_n >= 0 \, \forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow$ $< f, P_n >= 0 \quad \forall N$ e quindi $0 =< f, P_n > \to \|f\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad f = 0$.

Serie trigonometriche Sia $c_n \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{Z}$ tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| := \sup_{N \in \mathbf{N}} \sum_{n=-N}^{N} |c_n| < \infty$$

allora la serie di potenze $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ converge, uniformemente, per $|z| \le 1$. In particolare é definita la funzione o *serie trigonometrica*

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Chiaramente, $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$ e

$$c_n =< f, e_n >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \qquad \|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER

Definizione (coefficenti di Fourier). Data $f \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, restano definiti

$$\hat{f}_n := < f, e_n > = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad \textbf{(coefficenti di Fourier) di} \quad f$$

Definizione (serie di Fourier). Data $f \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \textbf{é serie di Fourier di} \quad f$$

f si dice **sviluppabile in serie di Fourier** se la sua serie di Fourier converge e

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \forall \quad t \in \mathbf{R}$$

La serie di Fourier di una $f \in \mathcal{I}_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ non convergerá, in generale, neppure puntualmente! Un esempio di funzione sviluppabile in Serie di Fourier é dato dalla serie trigonometrica $\quad f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad$ nell'ipotesi che $\quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{int} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

Teorema 1. $\quad f \in C_{2\pi}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \;\Rightarrow\; f$ *é somma (uniforme) della propria serie di Fourier e* $\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2 \quad$ *(identitá di Parseval)*

É una conseguenza del Corollario, che qui riformuliamo:

Principio di identitá. *Siano* $f, g \in C_{2\pi}$*. Se* $\hat{f}_n = \hat{g}_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$*, allora* $f \equiv g$*.*

Prova del Teorema 1. $\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad g(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \quad$ é in $C_{2\pi}$ ed ha gli stessi coefficenti di Fourier di f. La conclusione viene dal Principio di Identitá.

NOTA. Non é purtroppo vero che per ogni $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ risulti $\quad \sum_{n \in \mathbf{Z}}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty$. La diseguaglianza di Bessel dá una proprietá simile ma piú debole:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2 \le \|f\|_2^2 < +\infty \qquad \forall f \in \mathcal{I}$$

Notiamo che basterebbe poco di piú: $\quad \exists\, \alpha > \frac{1}{2}$ tale che $\quad \sum_n |n^\alpha \hat{f}_n|^2 < \infty \quad \overset{CS}{\Longrightarrow}$

$\sum_n |\hat{f}_n| \le \left(\sum_n |n^\alpha \hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ e quindi f é sviluppabile in serie di Fourier.

Sviluppabilitá di funzioni C^1.

La situazione in NOTA (caso $\alpha = 1$) si incontra se $f \in C^1$, ove

$$f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \Re f, \Im f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R}) \quad e \quad f' := (\Re f)' + i(\Im f)'$$

Teorema 2. *Ogni $f \in C^1_{2\pi}$ é somma uniforme della propria serie di Fourier.*

Lemma. $f \in C^1_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C}) \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(n) = -\frac{i}{n}\widehat{f'}(n) \quad \forall n \neq 0.$
Prova.

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t)e^{-int}\right)' dt = \hat{f'}_n - i\,n\;\hat{f}_n \quad \text{e quindi} \quad \hat{f}_n = -\frac{i}{n}\widehat{f'}(n) \quad \forall n \neq 0$$

Prova del Teorema 2. Da $f' \in C_{2\pi}$ segue, per Bessel ed usando il Lemma, che $\sum\limits_n |n\hat{f}_n|^2 < \infty$. Procedendo come sopra, otteniamo da Cauchy-Schwartz

$$\sum_{n\neq 0}|\hat{f}_n| = \sum_{n\neq 0}|n\hat{f}_n|\,|\frac{1}{n}| \leq \left(\sum_{n\neq 0}|n\hat{f}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}) < \infty$$

Regolaritá e decadimento dei coefficenti di Fourier.

Una ovvia estensione del Lemma dice che

$$f \in C^k_{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \hat{f}_n = (\frac{1}{in})^k\left(\widehat{f^{(k)}}\right)_n \quad \forall n \neq 0$$

e quindi, per Bessel, $\sum |n|^{2k}|\hat{f}_n|^2 < \infty$ e quindi $|\hat{f}_n| = \circ(\frac{1}{n^k})$.
Viceversa, piú é rapido il decadimento di $\hat{f}_n$ pú alta é la regolaritá di f: $\exists \alpha > \frac{1}{2}$:

$$\sum |n|^{2(k+\alpha)}|\hat{f}_n|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum |n^k\hat{f}_n| \leq \left(\sum_n |n|^{2(k+\alpha)}\,|\hat{f}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

e quindi la serie di Fourier di f converge uniformemente insieme alle sue prime k derivate e quindi $f \in C^k$. Ne deriva che, se $f \in C_{2\pi}$, allora

$$f \in C^\infty(\mathbf{R}) \quad \text{se e solo se} \quad \hat{f}(n) = O(\tfrac{1}{|n|^p}) \qquad \forall p \in \mathbf{N}.$$

NOTA. Si puó dimostrare che 'analiticitá equivale a decadimento esponenziale' dei coefficenti di Fourier: se $f \in C_{2\pi}$, allora

$$f \quad \text{é analitica} \quad \Leftrightarrow \quad \exists C, \sigma > 0 : \qquad |\hat{f}(n)| \leq Ce^{-\sigma|n|}$$

Sviluppabilitá di funzioni regolari a tratti.

L'ipotesi C^1 su f nel Teorema 2 si puó indebolire chiedendo ad $f \in C_{2\pi}$ di essere C^1 ' a tratti', ovvero di essere C^1 al di fuori di un insieme discreto. Infatti, se

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p,\ p \in \mathbf{N} \quad ed \quad f \in C([t_1, t_p]) \cap C^1\left((t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{p-1}, t_p)\right)$$

allora $\int_{t_1}^{t_p} f'(t)dt$ esiste (eventualmente in senso improprio) e vale il TFC:

$$\int_{t_1}^{t_p} f'(t)dt = f(t_p) - f(t_1)$$

Infatti, $\int_{t_1+\epsilon}^{\frac{t_1+t_2}{2}} f' = f(\frac{t_1+t_2}{2}) - f(t_1+\epsilon) \overset{\epsilon \to 0}{\to} f(\frac{t_1+t_2}{2}) - f(t_1)$ e quindi

$\int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}} f'$ esiste (eventualmente in senso improprio) e $\int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}} f' = f(\frac{t_1+t_2}{2}) - f(t_1)$

Ripetendo lo stesso argomento sui restanti intervalli, troviamo

$$\int_{t_1}^{t_p} f' = \int_{t_1}^{\frac{t_1+t_2}{2}} f' + \int_{\frac{t_1+t_2}{2}}^{t_1} f' + \ldots + \int_{t_{p-1}}^{\frac{t_{p-1}+t_p}{2}} f' + \int_{\frac{t_{p-1}+t_p}{2}}^{t_p} f' = [f(\frac{t_1+t_2}{2}) - f(t_1)] +$$

$$+[f(t_2) - f(\frac{t_1+t_2}{2})] + \ldots + [f(\frac{t_p+t_{p-1}}{2}) - f(t_{p-1})] + [f(t_p) - f(\frac{t_{p-1}+t_p}{2})]$$
$$= f(t_2) - f(t_1)$$

Teorema 2 bis. Siano $-\pi = t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = \pi, p \in N$ ed $f \in C_{2\pi} \cap C^1\left((t_1, t_2) \cup \ldots \cup (t_{p-1}, t_p)\right)$. Se $\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 dt < \infty$, allora f é somma uniforme della propria serie di Fourier.

Infatti, per quanto sopra, $\hat{f}(n) = -\frac{i}{n}\widehat{f'}(n)$ e, per Bessel, $\sum_n |\widehat{f'}(n)|^2 < \infty$.

NOTA. Basterebbe $\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^p dt < \infty$ per un $1 < p < 2$, perché si puó provare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g|^p dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_n |\hat{f}(n)|^q < \infty, \quad \text{ove} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (\text{ Hausdorff-Young})$$

Convergenza puntuale nelle serie di Fourier (il criterio di Dini)

Teorema 4 *(sviluppabilitá in serie di Fourier per funzioni Lipschitziane).*

Sia $f \in \mathcal{I}_{2\pi}$. Se vale la *condizione di Dini* in τ:

$$\exists \delta > 0 : \qquad \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t+\tau) - f(\tau)}{t} \right| dt < \infty$$

allora $\quad f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau}$: $\quad f$ é, in τ, somma della propria serie di Fourier.

NOTA. La condizione di Dini é certamente soddisfatta in ogni punto se f é Lipschitziana od anche solo holderiana di esponente $\alpha \in (0,1)$, ovvero

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y|^\alpha \qquad \forall \quad x, y$$

Prova del Teorema 4. $\quad$ Sia $\quad g(t) := f(t+\tau) - f(\tau) \quad$ É

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+\tau) - f(\tau)]dt \overset{t+\tau=s}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\tau}^{\pi+\tau} [f(s)ds - f(\tau) = \hat{f}(0) - f(\tau)$$

$$e, \quad se \quad n \ne 0 : \qquad \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t+\tau) - f(\tau)]e^{-int}dt \overset{t+\tau=s}{=} \hat{f}_n e^{in\tau}$$

Sommando, troviamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} - f(\tau)$$

Si tratta quindi di provare che $\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n = 0, \quad$ ovvero, siccome $g(0) = 0$, che l'asserto del Teorema vale per g in $\tau = 0$, sotto appunto l'ipotesi $\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{g(t)}{t}\right| dt < \infty$. In altre parole, possiamo supporre che sia $\quad \tau = 0,\ f(0) = 0$ e $\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{g(t)}{t}\right| dt < \infty, \quad$ e provare che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n = 0$$

Scriviamo

$$F(t) := \frac{f(t)}{e^{it} - 1}, \qquad f(t) = F(t)e^{it} - F(t)$$

La funzione $F(t)$ é integrabile, al pari di f, in $\{|t| \ge \delta\}$, ed assolutamente integrabile (eventualmente in senso improprio) in $\{|t| \le \delta\}$, perché $F(t) = \frac{f(t)}{t}\, \frac{t}{e^{it}-1}$ e $\frac{f(t)}{t}$

é assolutamente integrabile per ipotesi mentre $\frac{t}{e^{it}-1} \to_{t\to 0} \frac{1}{i}$. Ma

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[Fe^{it} - F\right] e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Fe^{-i(n-1)t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Fe^{-int} = \hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n$$

Se f fosse, di piú, Lipschitziana (rapporto incrementale limitato), F sarebbe addirittura limitata, e quindi potremmo applicare Bessel: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{F}_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt < \infty$ e quindi $F_n \to_{|n|\to\infty} 0$ e quindi

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n = \sum_{n=-N}^{N} [\hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n] = \hat{F}_{-N-1} - \hat{F}_N \to_N 0$$

Sotto l'ipotesi piú debole

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$$

possiamo solo dire che F é (solamente) assolutamente integrabile.
Mostriamo che F é limite in media di una successione di funzioni periodiche, limitate e integrabili. Basta infatti prendere una $\varphi \in C(\mathbf{R}, [0,1]$ uguale a 1 per $|t| \ge 2$ e uguale a zero se $|t| \le 1$ e porre $F_n(t) = F(t)\varphi(nt)$. Ed allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F - F_n|(t)dt = \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} |F(t)|(1 - \varphi(nt))dt \le \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} |F(t)| \to_n 0$$

perché F é assolutamente integrabile. Dunque

$$|\hat{F}(n)| \le |\hat{F}(n) - \hat{F}_k(n)| + |\hat{F}_k(n)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F - F_k|dt + |\hat{F}_k(n)| \le \epsilon + |\hat{F}_k(n)| \qquad \forall k \ge k_\epsilon$$

Siccome F_k sono limitate, $\hat{F}_k \in l^2$ e quindi $F_k(n) \to_{|n|\to\infty} 0$. Fissato $k \ge k_\epsilon$ e passando al limite, troviamo

$$\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{F}(n)| \le \epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

cioé $\quad \hat{F}(n) \to_{|n|\to\infty} 0 \quad$ e questo basta, come sopra, per concludere.

APPENDICE

1. Verifichiamo che, se $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, allora

$$P_N := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \equiv \overline{\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}} \quad \overset{(i)}{\Leftrightarrow} \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n \quad \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$P_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt = a_0 + \sum_{0<|n|\le N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$$

$\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$: $P_N = \overline{P_N} \quad \Leftrightarrow \quad \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \sum\limits_{n=-N}^{N} \overline{c_n} e^{-int} \overset{-n:=m}{=} \sum\limits_{m=-N}^{N} \overline{c_{-m}} e^{imt} \quad \Leftrightarrow$ $\overline{c_n} = c_{-n} \quad \Leftrightarrow \quad a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$ perché due polinomi sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficenti, ovvero $P_N \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_n = 0 \quad \forall n$ e $P_N \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_m =< P_N, e_m >= 0 \quad \forall m \in \mathbf{Z}$.

$\overset{(ii)}{\Rightarrow}$: se $P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$ é reale, e quindi $a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n$, troviamo, usando le formule di Eulero, $P_N := \sum\limits_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} [\cos nt + i \sin nt] =$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} [\cos nt + i \sin nt] + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} [\cos nt - i \sin nt] =$$

$$a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nt + i a_n \sin nt - i b_n \cos nt + b_n \sin nt] +$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nt - i a_n \sin nt + i b_n \cos nt + b_n \sin nt] = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

$\overset{(ii)}{\Leftarrow}$: Usando anche qui le formule di Eulero, troviamo che

$$a_{-n} := a_n, \quad b_{-n} := -b_n \quad \Rightarrow \quad P_N := a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} =$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int} = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \sum_{n=-1}^{-N} \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} e^{-int}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int}$$

$c_n \in \mathbf{C},\ \ n \in \mathbf{Z},\ \ N \in \mathbf{N}$. Scrivendo $c_n = a_n - ib_n$, le formule di Eulero danno

$$P_N = \sum_{n=-N}^{N} [a_n \cos nt + b_n \sin nt] + i \sum_{n=-N}^{N} [a_n \sin nt - b_n \cos nt]$$

2. Osservazione: se $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, i suoi coefficenti di Fourier sono complessi coniugati, e quindi la serie di Fourier associata é reale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt - \frac{i}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \right) (\cos nt + i \sin nt) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt) \cos nt + (\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt) \sin nt \right] +$$

$$\frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt)\ \sin nt - (\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt)\ \cos nt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \right) \cos nt\ + \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \right) \sin nt$$

3. Osserviamo che $\qquad f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad P_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad \Rightarrow$

$$(f * P_N)(t) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \left[c_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right] e^{int}$$

cioé la convoluzione di una $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ con un polinomio trigonometrico é un polinomio trigonometrico.

4. Lemma Riemann-Lebesgue. Se $|f|$ é integrabile in $[-\pi, \pi]$ allora $\hat{f}_n \to 0$.

Cenno di dimostrazione. La tesi é vera se esiste $f_k \in C_{2\pi}$ tale che $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_k - f| \to_0$. Infatti, in tal caso,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon : \qquad \limsup_n |\hat{f}(n)| \leq \limsup_n |\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| \leq \epsilon \quad \forall k \geq k_\epsilon$$

perché $|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f - f_k) e^{-int} \right| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| \leq \epsilon$ per $k \geq k_\epsilon$ opportuno. La tesi segue poi dal fatto che per ogni funzione assolutamente integrabile in $[-\pi, \pi]$

tali approssimanti esistono (cosa che qui non possiamo dimostrare).

5. Esercizio. Provare che se $f \in C([-1,1]) \cap C^1((-1,1) \setminus \{0\})$ ed f' é limitata in $(-1,1) \setminus \{0\}$ allora f é Lipschitziana in $[-1,1]$.
Sia $|f'(x)| \le c \quad \forall x \in (-1,1), x \neq 0$.
$0 < \epsilon < x < 1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\epsilon)| \le c|x - \epsilon| \quad \Rightarrow |f(x) - f(0)| \le cx$
$-1 < y < -\epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(-\epsilon)| \le c|y + \epsilon| \quad \Rightarrow |f(y) - f(0)| \le c|y|$.
Dunque
$-1 < y \le 0 \le x < 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| \le c(x - y) = c|x - y|$.