AM210 13/14: Tracce delle lezioni- X Settimana

IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$, $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Trovare, se esistono, $\delta > 0$, e una funzione $\gamma \in C^1((-\delta,\delta), O)$ tali che

$$\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)) \qquad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma(0) = x \qquad\qquad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione $\dot\gamma(t) = f(\gamma(t))$ é in effetti un **sistema di n equazioni differenziali** nelle n (funzioni) incognite $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

$$\dot\gamma_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta,\delta), \qquad \gamma_i(0) = x_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

La condizione $\gamma(0) = x$ si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data f si chiama anche **campo di vettori** in O (i vettori $f(x)$ applicati nei punti $x \in O$). Una soluzione γ é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori* f e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale x in O si otterrá una famiglia di curve $\gamma^x(t)$ che si chiamerá **flusso** generato dal campo f.

Dal punto di vista dinamico, f é un **campo di velocitá** e $\gamma(t)$ é, al variare di t, la **traiettoria od orbita** di un punto mobile la cui velocitá all'istante t é data da $f(\gamma(t))$ e che si trova nell'istante iniziale $t = 0$ nella posizione iniziale x.

ESEMPIO. *Sistemi lineari* $n \times n$. Data $\mathcal{A} := (a_{ij})$ matrice $n \times n$, le resta associato il sistema di n (EDO) in n incognite $x_i = x_i(t)$:

$$\dot x_i(t) = a_{i1}x_1(t) + \ldots + a_{in}x_n(t) \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \qquad\qquad (EDO)$$

Osserviamo che se $\mathcal{P}$ é matrice $n \times n$ invertibile e $x(t)$ é soluzione di (EDO), posto $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$, risulta $\dot y = \dot{\overline{\mathcal{P}^{-1}x}} = \mathcal{P}^{-1}\dot x = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}x = (\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P})y$. Dunque x é soluzione di (ED=) se e solo se $y(t) := \mathcal{P}^{-1}x(t)$ é soluzione del nuovo sistema

$$\dot y = (\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P})y$$

Come noto, scelte opportune di $\mathcal{P}$ permettono di portare $\mathcal{A}$ in forme piú semplici, le forme canoniche. Ad esempio, se $\mathcal{A}$ ha n autovettori ξ^j linearmente indipendenti, corrispondenti ad autovalori λ_j, e $\mathcal{P}$ é la matrice che ha per colonne gli autovettori, allora $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{P}$ é matrice diagonale, con elementi della diagonale dati dai λ_j.

Richiamiamo le forme canoniche nel caso $n = 2$. Un ruolo fondamentale nella riduzione a forma canonica é giuocato dall'analisi spettrale della matrice dei coefficenti $\mathcal{A}$. Le forme canoniche corrispondono ai casi seguenti: la matrice $\mathcal{A}$ ha

(i) due autovalori reali $\lambda_1 \leq \lambda_2$ con due autovettori linearmente indipendenti; forma canonica corrispondente: matrice diagonale con elementi λ_1, λ_2

(ii) due autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda$, con $\ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = \mathbf{R}\xi$
forma canonica corrispondente: $a_{ii} = \lambda, \quad a_{21} = 0$
Per vederlo, basta prendere come $\mathcal{P}$ la matrice che ha per colonne ξ ed $\eta \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, tale che $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^2(\eta) = 0$.

(iii) due autovalori complessi coniugati $a \pm ib$;
forma canonica corrispondente: $a_{ii} = a, \quad a_{12} = b, \quad a_{21} = -b$.
Per vederlo, basta prendere come $\mathcal{P}$ la matrice che ha per colonne parte reale e coefficente della parte immaginaria dell'auovettore corrispondente ad $a + ib$.

Nel caso (i) abbiamo il sistema $\dot{x} = \lambda_1 x, \quad \dot{y} = \lambda_2 y$

La soluzione di punto iniziale (traiettoria passante per) (x_0, y_0) é

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

Notiamo che se $\lambda_1 \, \lambda_2 > 0$, le traiettorie sono asintotiche all'equilibrio $(0, 0)$:

$$(x(t), y(t)) \to (0, 0) \quad \text{per } t \to -\infty, \text{ se } \lambda_1 > 0, \text{ oppure per } t \to +\infty, \text{ se } \lambda_2 < 0\ .$$

Nel tracciare le traiettorie, possiamo supporre $x_0, y_0 \geq 0$; gli altri casi si deducono per riflessione rispetto agli assi. Se $y_0 = 0$ (risp. $x_0 = 0$), il moto avviene lungo l'asse delle x (risp. delle y). Come osservato sopra,

l' origine é un punto di equilibrio repulsivo se $\lambda_1 > 0$: $\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$,
ed é invece *attrattivo* se $\lambda_2 < 0$: $\dot{x} < 0, \quad \dot{y} < 0$.

Eliminando il parametro, si trova l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \qquad x > 0$$

Nel caso $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ le traiettorie, diverse dai semi assi, non sono asintotiche all'equilibrio, che é parzialmente attrattivo/parzialmente repulsivo, ma sono piuttosto simili a rami di iperboli (come quando $\frac{b}{a} = -1$).

Nel caso (ii) abbiamo il sistema $\dot{x} = \lambda x + ay, \quad \dot{y} = \lambda y$

La soluzione della seconda equazione é $y = y(0)e^{\lambda t}$ e la prima equazione diventa $\dot{x} = \lambda x + ay(0)e^{\lambda t}$ e quindi $x(t) = [x(0) + ay(0)t]e^{\lambda t}$. Dunque le soluzioni sono, in dipendenza dalla condizione iniziale (due parametri arbitrari)

$$x(t) = [x(0) + ay(0)t]e^{\lambda t}, \qquad y = y(0)e^{\lambda t}$$

Caso (iii). Il sistema si scrive $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = -bx + ay$ ovvero $\dot{x} - ax = by$, $\dot{y} - ay = -bx$ ovvero, posto $\xi(t) := x(t)e^{-at}$, $\eta(t) = y(t)e^{-at}$

$$\dot{\xi} = b\eta, \qquad \dot{\eta} = -b\xi$$

Se $(\xi(t), \eta(t))$ é soluzione di questo nuovo sistema, allora

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{2}\right] = \xi\dot{\xi} + \eta\dot{\eta} = b\xi\eta - b\eta\xi \equiv 0$$

e quindi la traiettoria per $(\xi(0), \eta(0) = (x_0, y_0)$, in forma cartesiana, é la circonferenza

$$\xi^2 + \eta^2 = x_0^2 + y_0^2$$

In particolare, le traiettorie del nuovo sistema (ovvero del vecchio nel caso a fosse zero) sono curve chiuse: il moto é periodico (parleremo di *orbite periodiche*). Per ottenere la soluzione in forma parametrica, conviene usare notazioni complesse, ponendo

$$z(t) := \xi(t) + i\eta(t), \quad \dot{z} = \dot{\xi} + i\dot{\eta} = -ib\dot{z} \quad z(0) = \xi(0) + i\eta(0)$$

Troviamo cosi $\quad z(t) = (\xi(0) + i\eta(0))e^{-ibt} =$

$$(\xi(0)+i\eta(0))(\cos(bt)-i\sin(bt) = \xi(0)\cos(bt)+\eta(0)\sin(bt)+i[\eta(0)\cos(bt)-\xi(0)\sin(bt)]$$

e quindi

$$\xi(t) = \mathcal{R}ez = \xi(0)\cos(bt) + \eta(0)\sin(bt), \qquad \eta(t) = \mathcal{I}mz = \eta(0)\cos(bt) - \xi(0)\sin(bt)$$

Tornando al sistema originario, troviamo la soluzione

$$x(t) = e^{at}[x(0)\cos(bt) + y(0)\sin(bt)], \qquad y(t) = e^{at}[y(0)\cos(bt) - x(0)\sin(bt)]$$

Notiamo che, mentre questa orbita é una circonferenza quando $a = 0$, nel caso $a \neq 0$, l'orbita é una spirale che si avvolge attorno all'equilibrio.

NOTA. Le soluzioni trovate esistono per tutti i tempi. Questo vale per tutti i sistemi lineari a coefficenti costanti, come conseguenza del teorema di esistenza globale che seguirá.

Una formulazione equivalente del Problema di Cauchy: esistenza di un punto fisso per un operatore integrale

Se $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ é soluzione del Problema di Cauchy $(*)$, allora, per il TFC, $\gamma_i(t) = x + \int_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$, ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \qquad t \in (-\delta,\delta) \qquad\qquad (**)$$

ove, se $\quad x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$, intendiamo che $\quad \int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_1(t)dt, \ldots, \int_a^b x_n(t)dt)$.

Viceversa, se $\gamma \in C(-\delta,\delta),O)$ risolve *l'equazione integrale* $(**)$, allora , di nuovo per il TFC, $\gamma \in C^1(-\delta,\delta),O)$ e soddisfa $(*)$.

Vediamo ora come $(**)$ si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale.* Per fissare le idee, supponiamo dapprima che $O = \mathbf{R}^n$. É allora definito l'operatore

$$N : C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) \to C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n), \qquad (N\gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau$$

Dunque γ é soluzione di (PC) se e solo se é punto fisso di N. Per cominciare, vogliamo mostrare, con **il metodo delle approssimazioni successive** che, se f é Lipschitziana, allora (PC) ha una soluzione, che risulterá essere unica. Avremo bisogno del

FATTO. Sia $x \in C([a,b],\mathbf{R}^n)$. Allora

$$\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2 \le \int_a^b \|x(t)\|_2\, dt$$

Infatti, $\| \int_a^b x(t)dt\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt\right)\left(\int_a^b x_i(s)ds\right) = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_a^b x_i(t)dt\right) x_i(s)\right] ds.$
Usando Cauchy-Schwartz, troviamo

$$\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2^2 \le \int_a^b \left[\| \int_a^b x(t)dt\|_2 \, \|x(s)\|_2 \right] ds = \| \int_a^b x(t)\, dt\|_2 \int_a^b \|x(s)\|_2\, ds$$

Dividendo per $\| \int_a^b x(t)\, dt\|_2$ si ottiene la tesi.

Nel seguito scriveremo $\qquad \|x\|_{\infty,T} := \sup_{|t|\le T} \|x(t)\|_2, \quad \forall x \in C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n).$

TEOREMA di Picard (globale)

(esistenza ed unicitá globale per (PC) in ipotesi di Lipschitzianitá globale)

Sia f Lipschitziana (di costante L) in $\mathbf{R}^n$. Allora (PC) ha, per ogni dato iniziale, una ed una sola soluzione, che é globale, ovvero, é definita su tutto $\mathbf{R}$. Di piú,

$$\dot\gamma(t) = f(\gamma(t)), \qquad \dot\eta(t) = f(\eta(t)) \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 \le e^{L|t|}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

Prova. Per ipotesi: $\|f(\xi) - f(\eta)\|_2 \le L\|\xi - \eta\|_2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^n$.

Esistenza (globale). Sia, per ogni t in $\mathbf{R}$,

$$\gamma_0(t) := x, \quad \gamma_1(t) := \int_0^t f(\gamma_0(\tau))d\tau = x+tf(x), \qquad \gamma_{n+1}(t) := x+\int_0^t f(\gamma_n(\tau))d\tau, \quad \dots$$

L'idea é che γ_n abbia un limite, uniforme sui limitati, γ. In tal caso si avrebbe

$$\|\int_{-T}^{T}[f(\gamma_n(\tau)) - f(\gamma(\tau))]d\tau\|_2 \le 2LT\|\gamma_n - \gamma\|_{\infty;T} \to_n 0 \qquad \text{e quindi}$$

$$\gamma(t) = \lim_n \gamma_{n+1}(t) = x+\lim_n \int_0^t f(\gamma_n(\tau))d\tau = x+\int_0^t \lim_n f(\gamma_n(\tau))d\tau = x+\int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau$$

Ora, $\gamma_{N+1}(t) = x + \sum\limits_{n=0}^{N}[\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)]$ e basta quindi mostrare che

$$\spadesuit \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\|\gamma_{n+1} - \gamma_n\|_{\infty,\,T} \ < \ \infty \qquad \forall T > 0 \qquad \spadesuit \qquad \text{perché}$$

convergenza totale, in $[-T, T]$, della serie, telescopica, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)] \Longrightarrow$

$$\gamma_{N+1}(t) \quad \overset{uniformemente}{\to_n} \quad \gamma(t) := x + \sum_{n=0}^{\infty}[\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)] \quad in \quad [-T,T] \quad \forall T$$

Proviamo ora $\spadesuit..\spadesuit$ Intanto, $\|\gamma_1(t)-\gamma_0(t)\|_2 \le |t|\times\|f(x)\|_2$, poi, ragionando induttivamente,

$$\clubsuit \qquad \|\gamma_n(t) - \gamma_{n-1}(t)\|_2 \le \|f(x)\|_2\, L^{n-1}\,\frac{|t|^n}{n!} \qquad \clubsuit \qquad \Longrightarrow$$

$$\|\gamma_{n+1}(t) - \gamma_n(t)\|_2 = \left\|\int_0^t [f(\gamma_n(\tau)) - f(\gamma_{n-1}(\tau))]d\tau\right\|_2 \le$$

$$L\left|\int_0^t \|\gamma_n(\tau) - \gamma_{n-1}(\tau)\|_2\, d\tau\right| \le \ L\ \left|\int_0^t \|f(x)\|_2 L^{n-1}\frac{|\tau|^n}{n!}\, d\tau\right| = \|f(x)\|_2\,\frac{L^n|t|^{n+1}}{n+1!} \quad \forall t$$

Quindi $\quad \|\gamma_{n+1}-\gamma_n\|_{\infty,T} \;\le\; \|f(x)\|_2\, T\frac{(LT)^n}{n+1!} \quad$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\gamma_{n+1}-\gamma_n\|_{\infty;\,T} \;\le\; \|f(x)\|_2\, T\, e^{LT}$$

Unicitá e dipendenza continua dal dato iniziale. Siano γ, η soluzioni di (PC). Allora

$$\varphi(t) := \|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 \le \|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 + \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\eta(\tau))\|_2 d\tau \le$$

$$\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 + L\int_0^t \|\gamma(\tau)-\eta(\tau)\|_2 d\tau := \psi(t) \qquad \forall t \ge 0$$

Per TFC, $\quad \psi' = L\varphi \le L\psi \quad$ e quindi $\quad (e^{-Lt}\psi(t))' = e^{-Lt}(\psi'(t) - L\psi(t)) \le 0 \quad$ e quindi, integrando $\quad e^{-Lt}\psi(t) \le \psi(0) = \|\gamma(0)-\eta(0)\|_2, \quad$ e quindi

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 = \varphi(t) \le \psi(t) \le e^{Lt}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \qquad \forall t \ge 0$$

Siccome, posto $\quad \gamma^-(t) := \gamma(-t), \quad \eta^-(t) := \eta(-t), \quad$ risulta

$$\dot\gamma^-(t) = -\dot\gamma(-t) = -f(\gamma(-t)) = -f(\gamma^-(t)), \qquad \dot\eta^-(t) = -f(\gamma^-(t))$$

per quanto sopra

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\| = \|\gamma^-(-t)-\eta^-(-t)\| \le e^{-Lt}\|\gamma^-(0)-\eta^-(0)\| = e^{-Lt}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \qquad \forall t \le 0$$

In conclusione

$$\|\gamma(t)-\eta(t)\|_2 = \varphi(t) \le \psi(t) \le e^{L|t|}\|\gamma(0)-\eta(0)\|_2 \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Tale stima implica che due soluzioni γ, η coincidono per tutti i tempi se coincidono per $t=0$ (o per qualsiasi altro tempo..).

NOTA. Tale Teorema implica anche l'esistenza locale in ipotesi di Lipschitzianitá locale: se

$$\exists r, L > 0 : \quad \|f(\xi) - f(\eta)\|_2 \le \|\xi - \eta\|_2 \qquad \forall \xi, \eta \in B_{2r}(x) \subset O \subset \mathbf{R}^n$$

allora esiste $\delta > 0$ ed esiste $\gamma \in C^1((-\delta,\delta), O)$ soluzione di (PC).
Sia infatti $\quad \varphi \in C^\infty(B_{2r}(x), [0,1]), \; \varphi \equiv 1$ in $B_r(x)$. $\quad$ Siccome $f\varphi$ é chiaramente globalmente Lipschitziana, il Teorema assicura l'esistenza di una soluzione per il Problema di Cauchy relativo a $f\varphi$, e tale soluzione é anche soluzione, per tempi piccoli, del Problema di Cauchy relativo ad f.
Diamo comunque una dimostrazione di tutto ció facendo uso di un principio fondamentale, il **Principio delle contrazioni**. Tale approccio fornirá anche la *dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale.*

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Spazi metrici completi, spazi di Banach

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$$

(X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo, ovvero

$$x_n \in V,\ \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \text{ per } n, m \text{ grandi} \quad \Rightarrow \quad \exists x \in V : \quad \|x_n - x\| \to_n 0.$$

ESEMPI.
1. Sia (X, d) completo, $C \subset X$. Allora (C, d) é completo $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.
2. $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea, é un Banach.

3. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. $C(K, \mathbf{R}^m)$, con $\quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\| \quad$ é un Banach.
Prova. Siccome $f_n \to f$ uniformemente ($f_n = ((f_n)_1, \ldots, (f_n)_m), \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$) se e solo se $(f_n)_i \to f_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ uniformemente, basta provarlo nel caso $n = 1$. Ora, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon : \ n, m \geq n_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dunque, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in K$ la $n \to f_n(x)$ é di Cauchy $\Rightarrow \quad \forall x \in K,\ \exists$ (finito) $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Poi, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon :$

$$|f_n(x) - f(x)| \ \leq \ |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \leq \ \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in K$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \ \forall x \in K$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ \ \forall x \in K$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f, ovvero $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0$.

4. $E := C([a, b], \mathbf{R}^m)$ munito della norma della convergenza uniforme uniforme $\|\gamma\|_\infty := \max_{[a,b]} \|\gamma(t)\|$ ove $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$ é spazio di Banach (come in 3).

5. $C([a, b], \mathbf{R})$, munito della norma $\quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt \quad$ non é completo.
Ad esempio $(a = -1, b = 1)$, $\quad \int_{-1}^{1} ||x|^{\frac{1}{n}} signx - signx| dx \to_n 0$ e quindi f_n é di Cauchy in $(C([-1, 1], \mathbf{R}), \|.\|_1)$, ma non esiste $g \in C([-1, 1], \mathbf{R})$ tale che $\|f_n - g\|_1 \to_n 0$.

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X, d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $T(C) \subset C$

(ii) $\exists k \in (0,1): \quad d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall\, x, y \in C$ (T é una **'contrazione'**)

allora $\exists! x \in C : \quad Tx = x$

Unicitá: $Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y.$ Infatti,

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x, y) \quad \Rightarrow \quad d(x, y) = 0 \quad \text{perché } k \in (0,1).$$

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $x_{n+1} = Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq kd(x_1, x_0)$$

Ugualmente, $d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{x_{n-1}}) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $\quad d(x_{n+p+1}, x_n) \leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$$\leq \left[k^{n+p} + \ldots + k^n\right] d(x_1, x_0) \leq k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1, x_0) \ \to_n 0$$

UN ESEMPIO. $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che $|f'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ é contrazione.

NOTA. La richiesta $k < 1$ in $ii)$ é essenziale. Esempio: sia $c_0 = \{x \in l^\infty : x(n) \to_n 0\}$ (sottospazio chiuso di l^∞), $B := \{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq 1\}$. $(B, \|.\|_\infty)$ é spazio metrico completo. Sia $T : B \to B$ cosí definita: $(Tx)(1) = 1$, $(Tx)(j) = x(j-1)$ se $j \geq 2$. Nota che $\|Tx\|_\infty = 1 \quad \forall x \in B$. Si ha $\|Tx - Ty\|_\infty = \|x - y\|_\infty \quad \forall x, y \in c_0$ ma T non ha punti fissi in B, perché $Tx = x \Rightarrow x(n) = 1\ \forall n$.

ESEMPI COMPLEMENTI ED ESERCIZI

1. l^p, $p \geq 1$ é completo; l^∞ é completo.

2. $C([a,b],\mathbf{R})$, munito della norma $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ non é completo.

3. Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue e 2π periodiche. Allora $\|f\|_\infty := \sup_{t\in\mathbf{R}} |f(t)|$ é una norma su $C_{2\pi}$, che, munito di tale norma, risulta completo.

Inoltre, $\|f\|_2 := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ é una norma su $C_{2\pi}$ e vale Cauchy-Schwartz:

$$|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

E rispetto a tale norma $C_{2\pi}$ non é completo.

4. (i) Provare che $C_0(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza uniforme $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ non é completo.
Provare poi che $V := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad f(x) \to_{|x|\to\infty} 0\}$ dotato della norma della convergenza uniforme é completo, e che $C_0(\mathbf{R})$ é denso in V.

(ii) Provare che $C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza in media $\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|dt$ non é completo.
Provare che $\|.\|_1$ non é una norma su V.
Provare che $\|.\|_1$ é una norma in $W := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad \int_{\mathbf{R}} |f| < \infty\}$ e che W, dotato di tale norma, non é completo.

5. Sia $k \in C([a,b] \times [c,d])$. Per ogni $f \in c([a,b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(x,t)f(x)dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c,d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[a,b])} |\int_a^b k(x,t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t)\in[a,b]\times[c,d])} |k(x,t)|\right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a,b],\mathbf{R})$ a $C([c,d],\mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.