AM120 2013-2014: RECUPERO II ESONERO

TEMA 1.

Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nulle fuori di un intervallo $[a, b]$ ed ivi limitate.

1.1 Provare che se f e g sono integrabili allora lo sono anche anche fg e $f + g$ e $\int_{\mathbf{R}} f + g = \int_{\mathbf{R}} f + \int_{\mathbf{R}} g$. Mostrare con degli esempi che l'integrabilitá di fg e di $f + g$ non implica l'integrabilitá di f e/o di g.

1.2 Provare che se f é integrabile allora lo sono anche $f^+, f^-, |f|$. Mostrare con degli esempi che l'integrabilitá di f^+, o quella di f^-,o quella di $|f|$ non implicano l'integrabilitá di f.

1.3 Dedurre da 1.1 che l'unione e l'intersezione di un numero finito di insiemi misurabili é ancora misurabile e mostrare con degli esempi come l'unione e/o l'intersezione di una famiglia numerabile di insiemi misurabili possa non essere misurabile.

1.4 Se f, g sono integrabili/assolutamente integrabili in senso improprio su $\mathbf{R}$, é ancora vero che lo sono anche $f^+, f + g$ ed fg? Considerare anche l'eventualitá che f e/o g siano non limitate.

TEMA 2. Siano

$$f_n \in C^2(\mathbf{R}) : \quad f_n(0) = f_n'(0) = 0 \quad e \quad \sup_n \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n''(x)| dx < +\infty$$

Provare che se f_n converge puntualmente ad f, allora $f \in C^1$. É addirittura vero che $f \in C^2$? *(Suggerimento: usare Ascoli-Arzelá)*

TEMA 3.

Scrivere, e dimostrare, la formula di Taylor con il resto in forma integrale, e dedurre la formula di Taylor con il resto secondo Lagrange.

TEMA 4.

Provare, utilizzando il confronto tra integrali e serie, la formula di Stirling.

.

ESERCIZIO 1.

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

ESERCIZIO 2.

Studiare la convergenza in $[0,1]$ della successione

$$\frac{x}{1+nx}$$

ESERCIZIO 3.

Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(x+2)^{\alpha}}\, dx$$

ESERCIZIO 4.

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{\cos x}\, dx$$

ESERCIZIO 5.

Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/assolutamente integrabili su $(-\infty, +\infty)$:

$$k(x) = \sqrt[3]{x}\cos x^4, \qquad h(x) = \frac{\arcsin(\sin x)}{x}$$