

AM120 2013-2014: APPELLO A

TEMA 1 (Teorema di Darboux). Sia F derivabile in \mathbf{R} , $f := F'$ in \mathbf{R} . Provare che

(f ha la proprietà del valore intermedio) $\forall x', x'', \forall t \in [0, 1] \exists s \in [0, 1] :$

$$f(sx' + (1-s)f(x'')) = tf(x') + (1-t)f(x'') \quad (*)$$

Mostrare con un esempio che la proprietà (*) non è sufficiente perché f ammetta primitiva in \mathbf{R} , ma che diventa sufficiente se f è anche monotona.

TEMA 2. Sia $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una successione di funzioni derivabili convergente puntualmente insieme alle sue derivate: $f(x) := \lim_n f_n(x)$, $g(x) := \lim_n f'_n(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

2.1 Mostrare con un esempio che f non è in generale continua.

2.2 Mostrare come, sotto ulteriori ipotesi, minimali, f risulterà continua.

2.3 Mostrare che se le f'_n sono equicontinue in x_0 allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \lim_n f'_n(x_0)$.

2.4 Mostrare che se $f_n \in C^2(\mathbf{R})$ allora la convergenza delle successioni f_n ed f'_n è uniforme sugli intervalli limitati e quindi $f \in C^1(\mathbf{R})$ e $f'(x) = \lim_n f'_n(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

TEMA 3. Siano $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ nulle fuori di un intervallo $[a, b]$ ed ivi limitate.

3.1 Provare che se f e g sono integrabili allora lo è anche fg . Mostrare con degli esempi che l'integrabilità di fg non implica l'integrabilità di f e/o di g .

3.2 Provare che se f è integrabile allora lo sono anche $f^+, f^-, |f|$. Mostrare con degli esempi che l'integrabilità di f^+ , o quella di f^- , o quella di $|f|$ non implicano l'integrabilità di f .

3.3 Se f, g sono integrabili/assolutamente integrabili in senso improprio su \mathbf{R} , è ancora vero che lo sono anche $f^+, f+g$ ed fg ? Considerare anche l'eventualità che f e/o g siano non limitate.

TEMA 4. Scrivere, e dimostrare, la formula di Taylor con il resto in forma integrale, e dedurre la formula di Taylor con il resto secondo Lagrange.

TEMA 5.

Provare, utilizzando il confronto tra integrali e serie, la formula di Stirling.

ESERCIZIO 1.

Determinare l'intervallo di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

ESERCIZIO 2.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^3 \sin x}$$

ESERCIZIO 3.

Studiare la convergenza in $[0, 1]$ della successione

$$\frac{x}{1 + nx}$$

ESERCIZIO 4.

Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(x+2)^\alpha} dx$$

ESERCIZIO 5.

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{\cos x} dx$$