2014-AM120: Settimana 12

CONFRONTO TRA INTEGRALI E SERIE

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbf{R}$ localmente integrabile, non negativa. Dalla additivitá dell'integrale:

$$\int_1^{+\infty} f = \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_j^{j+1} f$$

Dunque f *é integrabile su* $[1, +\infty)$ *se e solo se la serie* $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f$ *converge* e

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f$$

Ma anche se f cambia segno, da $\int_1^x f = \int_1^{[x]} f + \int_{[x]}^x f = \sum_{j=1}^{[x]-1} \int_j^{j+1} f + \int_{[x]}^x f,$ segue che f é integrabile su $[1, +\infty)$ sse la serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f$ converge, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} f = \sum_{j=1}^{\infty} \int_j^{j+1} f$$

Il caso di funzioni non negative e decrescenti

Proposizione *Sia* $f \geq 0$ *non crescente (e quindi localmente integrabile) in* $[1, +\infty)$. *Allora*

$$\clubsuit \qquad \sum_j f(j) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f < +\infty \qquad \clubsuit$$

$$\spadesuit \quad f(1)+\ldots+f(n) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_1^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right) + O(f(n+1) - f(\infty)) \quad \spadesuit$$

Prova di $\clubsuit$ Segue da $f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}.$

Prova di $\spadesuit$ Osserviamo innanzi tutto che si puó scrivere

$$f(1) + \ldots + f(n) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_{j=1}^{n} \left(f(j) - \int_j^{j+1} f \right) \qquad (*)$$

Poi, da $f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j) \ \ \forall j \in \mathbf{N}$ segue che la serie $\sum_1^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right)$ é a termini positivi. Inoltre tale serie converge, perché

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} [f(j) - f(j+1)] = f(n+1) - f(\infty) = \circ(1)$$

Dunque ♠ segue da $(*)$: $\quad \sum_{j=1}^{n} f(j) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_{j=1}^{\infty} \left(f(j) - \int_j^{j+1} f \right) -$

$$- \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right) = \int_1^{n+1} f(x)dx + \sum_{j=1}^{\infty} \left(f(j) - \int_j^{j+1} f \right) + O(f(n+1) - f(\infty))$$

ESEMPI di uso di ♣

1. Sia $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx < +\infty$ se e solo se $r > 1$ la serie (armonica generalizzata) $\sum_n \frac{1}{n^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^r} < +\infty$ se e solo se $r > 1$, e quindi la serie $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

La formula ♠ puó essere utilizzata per *stimare*

I) la rapiditá con cui diverge la somma parziale di una serie divergente
II) la rapiditá con cui converge a zero il resto n-esimo di una serie convergente.

I. **'Comportamento asintotico' di** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

$$\exists \gamma > 0 : \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} = \log(n+1) + \gamma + O(\frac{1}{n})$$

Sia $f(x) = \frac{1}{x}$, cosicché

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = f(1) + \dots + f(n) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + \gamma + O(\frac{1}{n}) = \log(n+1) + \gamma + O(\frac{1}{n})$$

($\gamma := \sum_1^{+\infty} (\frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n}) < +\infty$ si chiama **costante di Eulero-Mascheroni**)

Esercizio. Provare che $\exists c>0:\ \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n\log n}\ =\ \log[\log(n+1)]\ +\ c\ +\ \circ(1)$.

II. Sia f integrabile. Da ♠ : $\sum_{j=1}^{n} f(j)\ =\ \int\limits_{1}^{n+1} f + c + O(f(n))$ segue che $\sum_j f(j)=\int_1^\infty f + c$ e quindi

$$\sum_{j\geq n} f(j) = \int\limits_{n+1}^{\infty} f\ +\ O(f(n))$$

Ad esempio, se $r>1$, $\sum_{j\geq n}\frac{1}{j^r}\ =\ \frac{1}{(r-1)n^{r-1}}\ +\ O(\frac{1}{n^r})$.

Da ♠ segue una formula analoga nel caso f sia non decrescente:

Proposizione *Sia $0\leq f_1\in C^1([1,+\infty))$ non decrescente con derivata non crescente in $[1,+\infty)$. Allora esiste una costante C tale che*

$$\spadesuit\spadesuit\qquad \sum_{j=1}^{n} f_1(j)\ =\ \int\limits_{1}^{n} f_1(x)dx\ +\ \int\limits_{1}^{n} f(x)dx\ +\ C\ +\circ(1)\qquad \spadesuit\spadesuit$$

ove $f(x):=f_1(x+1)-\int\limits_{x}^{x+1} f_1(t)dt\ \geq 0$, $f'\leq 0$ *e* $\circ(1):=f(n+1)-f(\infty)$ giacché, per il Teorema della media e la monotonia di f_1, si ha

$$\exists\xi\in[x,x+1]:\quad f(x)=f_1(x+1)-\int\limits_{x}^{x+1} f_1(t)dt\ =\ f_1(x+1)-f_1(\xi)\geq\ 0$$

mentre TFC, Lagrange e monotonia di f_1' implicano che

$$\exists\xi\in[x,x+1]: f'(x)=f_1'(x+1)-[f_1(x+1)-f_1(x)]=f_1'(x+1)-f_1'(\xi)\leq 0$$

Quindi ♠ si applica ad f ottenendo

$$\sum_{j=1}^{n} f_1(j)\ =\ \int\limits_{1}^{n} f_1(x)dx\ +\ \sum_{j=1}^{n-1}\left(f_1(j+1)-\int\limits_{j}^{j+1} f_1\right)=\int\limits_{1}^{n} f_1(x)dx\ +\ \sum_{j=1}^{n-1} f(j)\ \stackrel{\spadesuit}{=}$$

$$\stackrel{\spadesuit}{=}\int\limits_{1}^{n} f_1(x)dx\ +\int\limits_{1}^{n} f(x)dx\ +\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(f(n)-\int\limits_{n}^{n+1} f\right)\ +\ f(n+1)-f(\infty)$$

da cui, ponendo $C:=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(f(n)-\int\limits_{n}^{n+1} f\right)<\infty$, $f(n+1)-f(\infty)=\circ(1)$, ♠♠.

Deriviamo da ♠♠ il comportamento asintotico del fattoriale :

$$n!\ =\ \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\left(\sqrt{2\pi}+O(\frac{1}{n})\right)\qquad (\textbf{formula di Stirling})$$

Proviamo prima che $\quad \exists b \in (0,+\infty): \quad b_n := \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \to_{n\to\infty} b. \quad$ Si ha

$$\log n! = \log 2 + \ldots + \log n \ = \ f_1(1) + \ldots + f_1(n) \qquad \textit{ove} \qquad f_1(x) := \log x$$

É $\quad f_1(1) = 0, \quad f_1' \geq 0, \quad f_1'' \leq 0 \quad$ e quindi si puó applicare ♠♠ :

$$\log n! = \int_1^n f_1(x)dx \ + \int_1^n f(x)dx \ + \ c + \circ(1) \qquad \textit{ove} \quad f_1(x) = \log x \qquad \textit{e}$$

$$f(x) \ := \ \log(x+1) \ - \int_x^{x+1} \log t dt \ = \ 1 \ - \ x\log(1+\frac{1}{x}) > 0, \quad \forall x > 0$$

Siccome $\quad \int_1^n \log(x)dx \ = \ n\log n - n + 1, \quad$ si ha intanto

$$\log n! = \ n\log n - n + 1 + \int_1^n f(x)dx \ + \ c + f(n) - f(\infty)$$

Per stimare $\quad \int_1^n f(x)dx \quad$ osserviamo che la formula di Mac Laurin per $\log(1+s)$ fornisce, per $x = \frac{1}{s}$ grande,

$$f(x) = 1 \ - \ x\log(1+\frac{1}{x}) = 1 - x\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O(\frac{1}{x^3})\right] = \frac{1}{2x} + O(\frac{1}{x^2}) \qquad (*)$$

e quindi $\quad f \ = O(\frac{1}{x}), \quad f(x) - \frac{1}{2x} = O(\frac{1}{x^2}) \quad$ per $x \to +\infty$. In particolare f é assolutamente integrabile su $[1,+\infty)$ e, piú precisamente, $\int_n^\infty |f(x) - \frac{1}{2x}]dx \leq \frac{c}{n}$. Ma allora,

$$\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{2x}dx + \int_1^n [f(x) - \frac{1}{2x}]dx = \log\sqrt{n} + \int_1^\infty [f(x) - \frac{1}{2x}]dx + O(\frac{1}{n})$$

Riassumendo, esiste una costante C tale che

$$\log n! = \ n\log n - n + \log\sqrt{n} + C + O(\frac{1}{n}) \qquad\qquad \text{e quindi}$$

$$n! = e^{\,n\log n - n + \log\sqrt{n}} \ e^{b + O(\frac{1}{n})} \ = \ \frac{\sqrt{n}\, n^n}{e^n} \ \left(e^C + O(\frac{1}{n})\right) \qquad b := e^C = \lim_n \frac{n!\, e^n}{n^n\sqrt{n}}$$

Un calcolo esatto di b si puó ottenere usando la formula di Wallis, che assicura che

$$\sqrt{\pi} = \frac{2n!!}{2n-1!!\,\sqrt{n}} \ \left(1 + O(\frac{1}{n})\right). \qquad\qquad \text{Da qui} \qquad b = \lim_n \frac{b_n^2}{b_{2n}} =$$

$$= \lim_n \left[\frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} \times \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)! e^{2n}}\right] = \sqrt{2}\lim_n \frac{(n!)^2\ 2^{2n}}{\sqrt{n}\ (2n)!} = \sqrt{2}\lim_n \frac{(2n!!)^2}{\sqrt{n}\ (2n-1)!!2n!!} = \sqrt{2\pi}$$

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

Abbiamo visto, nel caso degli integrali ordinari, il seguente teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale:

$$f_n \in C([a,b]), \quad f_n \to_n f \ \text{ uniformemente in } [a,b] \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \ = \ \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Le f_n si possono supporre anche solo integrabili, ottenendo in effetti di piú:

$$\int\limits_a^b |f_n - f| \le \ (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to_n 0$$

Tale teorema non si estende al caso degli integrali impropri: in primo luogo perché, se si tratta di funzioni non limitate, non ha molto senso parlare di uniforme convergenza, e, in secondo luogo, perché su intervalli non limitati la convergenza uniforme non garantisce che il limite degli integrali sia l'integrale del limite. Vediamolo con degli esempi:

Esempio 1. Siano $f_n(x) := \frac{1}{n}\chi_{[n,n+1]}, \quad g_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n}]}$. Siccome, fissato x, si ha $f_n(x) = 0$ se $n > x$ e $g_n(x) = 0$ se $n > \frac{1}{x} > 0$ e per ogni n se $x \le 0$, vediamo che per ogni x fissato, f_n e g_n sono definitivamente nulle, e quindi f_n e g_n convergono puntualmente (ed infatti uniformemente nel caso di f_n) ma $\int_{\mathbf{R}} f_n = \int_{\mathbf{R}} g_n = 1 \quad \forall n$, e quindi l'integrale del limite non é il limite degli integrali.

Esempio 2. Sia $f(x) := \frac{x}{1+x^4}$. Si ha che $f_n(x) := nf(nx) = \frac{n^2x}{1+n^4x^4} \to_n 0 \ \forall x \in R$ ma $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n f \to \int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^4} \ne 0$ mentre $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = 0$.
In questo esempio la f_n non converge uniformemente in $[0,1]$. Converge peró uniformemente in $\quad [\delta, 0] \quad \forall \delta \in (0,1)$.

Esempio 3. Se $f \in C(\mathbf{R})$ é limitata ed integrabile in $\mathbf{R}$ con $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \ne 0$, é

$$f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n}) \to_n 0 \quad \text{uniformemente in} \quad \mathbf{R} \quad \text{ma} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \ne 0$$

D'altro canto, l'ipotesi di uniforme convergenza puó sicuramente essere indebolita, come indicano i seguenti esempi:

Esempio 1. $\quad f_n(x) = x^n, \quad x \in [0,1]$. Tale successione converge, ma non uniformemente, a $\chi_{\{1\}}(x), \quad x \in [0,1] \quad$ e $\int\limits_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to_n 0 = \int\limits_0^1 \chi_{\{1\}}(x)dx$. Dunque

il limite degli integrali é uguale all'integrale del limite, anche in questo caso in cui la convergenza non é uniforme.
Notiamo peró che, anche senza calcolare l'integrale, si sarebbe potuto arrivare alla stessa conclusione usando la convergenza uniforme in $[0, 1 - \delta] \quad \forall\delta \in (0, 1)$.

Esempio 2. Siano $f \in C((0, 1]) \quad g \in C([1, +\infty)$, integrabili (eventualmente in senso improprio) in $(0, 1]$, $[1, +\infty)$ rispettivamente.
Allora $f_n := f\chi_{[\frac{1}{n},1]}$ converge puntualmente in $[0, 1]$ (e uniformemente in $[\delta, 1] \quad \forall\delta \in (0, 1)$) ad f e, per definizione, $\int\limits_0^1 f = \lim_n \int\limits_0^1 f_n$. Ma non sará vero, in generale, che $\int\limits_0^1 |f_n - f| \to_n 0$.
Similmente, $g_n := g\chi_{[1,n]}$ converge puntualmente in $[1, +\infty)$ (ed uniformemente in $[1, M] \quad \forall M > 0$, ma non, in generale, su tutto $[1, +\infty)$) a g e, per definizione, $\int\limits_1^\infty g = \lim_n \int\limits_1^\infty g_n$. Ma non sará vero, in generale, che $\int\limits_0^1 |f_n - f| \to_n 0$.
Se invece f (o g) non sono integrabili (in senso improprio), allora le f_n e g_n forniscono esempi di successioni di funzioni (continue) integrabili il cui limite puntuale (od addirittura localmente uniforme) non é integrabile.
Ritornando al caso in cui f (o g) siano integrabili, anzi, assolutamente integrabili, vediamo che $\int\limits_0^1 |f_n - f| = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} |f| \to_n 0$, $\int\limits_1^\infty |g_n - g| = \int\limits_n^\infty |g| \to_n 0$. Piú in generale

Teorema Siano $f_n \in C((a, b))$, $f_n \to_n f$ in (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Supponiamo che:

(i) la convergenza é uniforme su ogni $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$
(ii) $\exists g : \ |f_n(x)| \leq g(x) \ \forall n, x$ con $\int\limits_a^b g < +\infty$ (**equidominatezza**)

$$\text{Allora} \qquad \int\limits_a^b |f_n - f| \to_n 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_n \int\limits_a^b f_n = \int\limits_a^b \lim_n f_n$$

Prova. Fissato $\epsilon > 0$, esistono $a_\epsilon < b_\epsilon$ in (a, b) e n_ϵ tali che

$$\int\limits_a^{a_\epsilon} g + \int\limits_{b_\epsilon}^b g \leq \frac{\epsilon}{8}, \qquad \sup_{t\in[a_\epsilon,b_\epsilon]} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

e quindi

$$\left| \int\limits_a^b f_n(t)dt - \int\limits_a^b f(t)dt \right| \leq 2\int\limits_a^{a_\epsilon} g + 2\int\limits_{b_\epsilon}^b g + \int\limits_{a_\epsilon}^{b_\epsilon} |f_n(t) - f(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Esempio 1. Calcolare $\lim_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}} \log x}{1+x^2}\, dx$.

Siccome $|\frac{e^{-\frac{x}{n}} \log x}{1+x^2}| \leq \frac{|\log x|}{1+x^2}$ e $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\log x|}{1+x^2} dx < +\infty$ perché $\frac{|\log x|}{1+x^2}$ va a zero, per x che va all'infinito, piú rapidamente di $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ mentre diverge in modo logaritmico (e quindi molto lentamente) in $x = 0$, vediamo che si tratta di una successione equidominata che converge puntualmente a $\frac{\log x}{1+x^2}$ in $(0, +\infty)$. Di piú, la convergenza é uniforme in $[\delta, \frac{1}{\delta}]$ $\forall \delta \in (0,1)$, perché

$$\delta \leq x \leq \frac{1}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\log x|}{1+x^2} \leq |\log \delta|, \qquad 1 - e^{-\frac{x}{n}} \leq 1 - e^{-\frac{1}{n\delta}} \quad \Rightarrow$$

$$|\frac{\log x}{1+x^2} - \frac{e^{-\frac{x}{n}} \log x}{1+x^2}| \leq |\log \delta| \ (1 - e^{-\frac{1}{n\delta}}) \to_n 0 \qquad \forall \delta \in (0,1)$$

Dunque $\lim_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}} \log x}{1+x^2}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx$. D'altra parte, cambiando variabile $x = \frac{1}{t}$, vediamo che

$$\int\limits_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = \int\limits_{+\infty}^1 \frac{-\log t}{1+t^{-2}} \frac{dt}{-t^2} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\log t}{1+t^2}\, dt$$

Concludiamo che

$$\lim_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}} \log x}{1+x^2}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\, dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = 0$$

Esempio 2. Il Teorema non assicura che $\lim_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}} \sin x}{x}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

In effetti il Teorema é inapplicabile perché la successione $f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x}{n}} \sin x}{x}$ non é equidominata, giacché $|\frac{e^{-\frac{x}{n}} \sin x}{x}| \leq g(x) \ \ \forall x > 0, n \in \mathbf{N} \Rightarrow |\frac{\sin x}{x}| \leq g(x)$ e quindi g, al pari di $\frac{\sin x}{x}$ non é assolutamente integrabile. Effettuando una integrazione per parti l'integrale dato si puó convertire in un integrale assolutamente convergente, e quindi....: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx =$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{-x^2}\, dx + \left[\frac{1 - \cos x}{x}\right]_0^{+\infty} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{4t^2}\, 2dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \lim_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{n}} \sin^2 t}{t^2}\, dt$$

APPENDICE

Dedurre dal teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale il teorema della derivazione termine a termine in ipotesi C^1.

Il limite delle derivate é la derivata del limite.

Siano $f_k \in C^1(I), I$ *intervallo aperto. Supponiamo* f_k *convergano puntualmente a* f *in* I*, e che* f_n' *convergano uniformemente a* g *in ogni* $[a,b] \subset I$*. Allora*

$$f \in C^1(I) \qquad \text{e} \qquad f' = g = \lim_k f_k'$$

Dimostrazione. Il Teorema Fondamentale del Calcolo assicura che

$$f_n(x) \;=\; f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

In virtú della uniforme convergenza delle derivate, passando al limite si ottiene

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Ora, g, limite uniforme di una successione di funzioni continue, é continua. Per il TFC f é derivabile e $f' = g$.