II Esonero di AM110 - 19/12/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1
Abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x[\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x^2}=0$$

per razionalizzazione e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{x}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\log^2(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\frac{\frac{1}{x^2}}{\log^2(1+\frac{1}{x})}=\frac{1}{2}$$

dai limiti notevoli dell'esponenziale e del logaritmo, ottenendo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^{\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\log^2(1+\frac{1}{x})}} &= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}}\right]^{\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}}{x}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\log^2(1+\frac{1}{x})}}\\ &= e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Esercizio 2
Per induzione si mostra che per ogni $n\in\mathbb{N}$ $a_n\geq 0$, $a_n\leq 3$ se $a_0\leq 3$ e $a_n\geq 3$ se $a_0\geq 3$. Studiamo l'eventuale crescenza di a_n: $a_n\leq a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$, o equivalentemente $a_n^2-2a_n-3=(a_n-3)(a_n+1)\leq 0$ che risulta soddisfatta se $-1\leq a_n\leq 3$. Abbiamo quindi che:
- se $0\leq a_0<3$, allora $a_n\in[0,3]$ cresce ed ammette quindi limite finito l;
- se $a_0=3$, allora $a_n=3$ per ogni n, ed $a_n\to 3$ per $n\to+\infty$;
- se $a_0>3$, allora $a_n\geq 3$ decresce ed ammette quindi limite finito l.

Siccome l deve soddisfare $l=\sqrt{2l+3}$, abbiamo che $l=3$ ($l=-1$ non accettabile), e quindi $a_n\to 3$ per $n\to+\infty$, per ogni $a_0\geq 0$.

Esercizio 3
Per la prima serie, studiamo la convergenza tramite il criterio della radice:

$$\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{(1+\frac{x}{n})^{n^2}}{n(\log n)^2}}=\limsup_{n\to+\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$$

dai limiti notevoli della radice $n-$esima. Otteniamo quindi convergenza per $x<0$ e divergenza per $x>0$ (dato x, i termini della serie sono definitivamente positivi). Per $x=0$ la serie si riduce a

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$$

che converge per il criterio di condensazione di Cauchy:

$$\sum_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n(\log 2^n)^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log^2 2}<+\infty.$$

Per la seconda serie, studiamo la convergenza assoluta tramite il criterio della radice:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n n \left(\frac{n\tan^3\frac{x}{n}}{2(1-\cos\frac{x}{n})}\right)^n\right|} = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{n\tan^3\frac{x}{n}}{2(1-\cos\frac{x}{n})}\right| = \limsup_{n\to+\infty} \left|x\frac{\tan^3\frac{x}{n}}{\frac{x^3}{n^3}}\frac{\frac{x^2}{n^2}}{2(1-\cos\frac{x}{n})}\right| = |x|$$

dal limite notevole della radice, del seno e del coseno. Otteniamo quindi convergenza assoluta per $|x| < 1$. Per $|x| > 1$ la serie non converge poiché risulta violata la condizione necessaria che il termine $n-$esimo della serie tenda a zero.

Esercizio 4
Poiché

$$a_n := \frac{\sqrt{9n^2+1}-\sqrt{n^2+5}}{n} = \sqrt{9+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{5}{n^2}} \to 2$$

per $n \to +\infty$, otteniamo che

$$\liminf_{n\to+\infty}(-1)^n a_n = -2\,, \quad \limsup_{n\to+\infty}(-1)^n a_n = 2.$$

Sicccome $(-1)^n a_n$ ammette solo due sottosuccessioni convergenti (lungo gli indici pari e lungo gli indici dispari), i punti di accumulazione di

$$A_2 := \{(-1)^n a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

sono solo ± 2, ossia $D(A_2) = \{-2, 2\}$. Otteniamo quindi $D(A) = \{1 \le |x| \le 2\}$, e l'insieme A risulta chiuso. Essendo anche limitato, otteniamo la compattezza di A.