

# I Esonero di AM110 - 30/10/2013

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

**Tema 1** [5 punti] Dato  $p > 0$ , provare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{p} = 1$ .

**Tema 2** [5 punti] Fornire la definizione di estremo superiore e provarne l'esistenza per insiemi superiormente limitati.

**Tema 3** [5 punti] Dopo aver fornito la definizione di punto di accumulazione, enunciare e dimostrare il Teorema di Bolzano-Weierstrass.

**Esercizio 1** [3 punti] Mostrare per induzione la seguente disuguaglianza:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

**Esercizio 2** [6 punti] Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^3 + 1)}{\log(2n^5 - 6)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\sqrt[3]{8^n + n^2} - \sqrt[3]{8^n + n}}.$$

**Esercizio 3** [6 punti] Calcolare sup ed inf dei seguenti insiemi, specificando se si tratta di massimo o minimo:

$$E = \{x > 0 : (\ln x)^3 - 2 \ln x \leq 2\}, \quad F = \left\{ \frac{2}{m} - \frac{1}{n^2} : n, m \in \mathbb{N}, n, m > 0 \right\}.$$