AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sull'estremo superiore ed inferiore

Esercizio svolto 1. Dire se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente o superiormente ed, in caso affermativo, trovare l'estremo inferiore o l'estremo superiore. Dire se si tratta di minimi o massimi.

i) $A := \left\{\frac{n-1}{n}\,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
ii) $B := \left\{\frac{2n}{n^2+1}\,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$;
iii) $C := \left\{\frac{(-1)^n}{n}\,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$;
iv) $D := \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n}\,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$
v) $E := \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\right\}$ and $E' := \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\right\}$;
vi) $F := \{x \in \mathbb{R} :\ x \cdot |x| > 2\}$.
vii) $G := \left\{n \in \mathbb{N} :\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{n^4}{n^4+1}\right)\right\}$.
viii) $H := \left\{|x| :\ x^2 + x < 2\right\}$.
ix) $I := \left\{\left|\frac{5-n}{n+3}\right|,\ n \geq 2\right\}$.
x) $L := \left\{\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Soluzione.

i) Osserviamo che
$$A := \left\{\frac{n-1}{n}\,:\, n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1 - \frac{1}{n}\,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$$
e che
$$0 \leq 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
Quindi:
- A è limitato inferiormente da 0 (ogni $k \leq 0$ è un minorante per A). In particolare, poiché 0 è un minorante e $0 \in A$, allora $0 = \min A = \inf A$.
- A è limitato superiormente da 1 (ogni $k \geq 1$ è un maggiorante per A). Dimostriamo che 1 è il *più piccolo* dei maggioranti.
  Sia $\varepsilon > 0$; mostriamo che $1 - \varepsilon$ non può essere un maggiorante. Infatti:
  $$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
  Quindi, per ogni $n > \frac{1}{\varepsilon}$ l'elemento $1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$ e di conseguenza non può essere un maggiorante.
  Conclusione: $\sup A = 1$. Osserviamo che 1 non è un massimo, in quanto $1 \notin A$ (infatti $1 - \frac{1}{n} \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

ii) Osservare che:

$$-1 \leq \frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, è sufficiente dimostrare:

$$\left| \frac{2n}{n^2+1} \right| \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Dimostriamo che vale questa disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n}{n^2+1} \right| = \frac{2|n|}{n^2+1} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2|n| \leq n^2+1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad n^2+1-2|n| \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad (|n|-1)^2 \geq 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

che è chiaramente vero. Quindi 1 è un maggiorante per B e -1 un minorante. Di conseguenza B è limitato superiormente ed inferiormente. Inoltre, dal momento che $1 \in B$ e $-1 \in B$, possiamo concludere che sono anche il massimo ed il minimo:

$$\min B = \inf B = -1 \qquad e \qquad \max B = \sup B = 1.$$

iii) Inanzitutto osserviamo che

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Quindi,

$$-1 \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Di conseguenze -1 è un minorante ed 1 un maggiorante per C. Ne segue che C è limitato sia inferiormente che superiormente. In particolare, dal momento che $-1 \in C$ (basta prendere $n = 1$) e -1 è un minorante, possiamo concludere che $\min C = \inf C = -1$.

Calcoliamo ora l'estremo superiore. Come abbiamo detto 1 è un maggiorante, ma non è il più piccolo dei maggiorante. Infatti, si dimostra che anche $\frac{1}{2}$ è un maggiorante:

- Se n è dispari, $\frac{(-1)^n}{n} < 0 < \frac{1}{2}$;
- Se n è pari (in particolare $n \geq 2$), allora

$$\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \qquad (\text{in quanto } \; n \geq 2).$$

Inoltre, $\frac{1}{2} \in C$ (basta prendere $n = 2$), quindi $\max C = \sup C = \frac{1}{2}$.

iv) Denotiamo $d_n := (-1)^n \frac{n-1}{n} = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Osserviamo che 1 è un maggiorante e -1 è un minorante. Infatti:

$$|d_n| = 1 - \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 \leq d_n \leq 1.$$

Dimostriamo che si tratta dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore.

- Dimostriamo che $\sup D = 1$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che $d_{n_0} \geq 1 - \varepsilon$. Assumiamo che n_0 sia pari, per esempio $n_0 = 2k_0$. Allora, bastera scegliere k_0 in maniera che:

$$d_{2k_0} = \frac{2k_0 - 1}{2k_0} = 1 - \frac{1}{2k_0} > 1 - \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad k_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

- In maniera simile (considerando n dispari), si dimostra che $\inf D = -1$.

Osserviamo che non si tratta né di un massimo, né di un minimo.

v) Osservare che $E := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. È facile verificare che:

$$\min E = \inf E = -\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad \max E = \sup E = \sqrt{2}.$$

In maniera simile,

$$E' := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}.$$

Si può dimostrare che $\sup E' = \sqrt{2}$ e $\inf E' = -\sqrt{2}$. Questa volta non si tratta né di un massimo, né di un minimo (in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$). Dimostriamo ad esempio che $\sup E' = \sqrt{2}$; la dimostrazione per l'estremo inferiore è speculare.

- Ovviamente $\sqrt{2}$ è un maggiorante: se $x \in E$, allora $x^2 \leq 2$ e quindi $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.
- Dimostriamo che è il più piccolo dei maggioranti. Sia $\varepsilon > 0$, vogliamo trovare $x \in E'$ tale che $x > \sqrt{2} - \epsilon$. Consideriamo il seguente insieme:

$$I := \left(\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Se $I = \emptyset$, allora vuol dire che $\sqrt{2} - \frac{\varepsilon}{2} \leq -\sqrt{2}$. Quindi, possiamo prendere un qualsiasi $x \in E'$ e si avrà $x > \sqrt{2} - \varepsilon$.
Se invece $I \neq \emptyset$, allora I sarà un intervallo aperto. Scegliamo quindi un qualsiasi razionale $x \in I$ e questo soddisferà la relazione $x > \sqrt{2} - \epsilon$.

vi) Si dimostra che

$$F := \{x \in \mathbb{R} : \; x \cdot |x| > 2\} = (2, +\infty).$$

Di conseguenza, $\inf F = 2$ (non è un minimo) e $\sup F = +\infty$ (l'insieme non è limitato superiormente).

vii) Osserviamo che

$$\frac{n^4}{n^4+1} = 1 - \frac{1}{n^4+1} \in (0,1)$$

è una successione crescente. Quindi,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n^4}{n^4+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n^4+2}\right).$$

Poiché $\sin x$ è crescente in $(0, \frac{\pi}{2})$, allora $\min G = \inf G = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mentre $\sup G = 1$ (non è un massimo).

viii) Si verifica facilmente che $x^2 + x < 2$ per $-2 < x < 1$. Quindi $H = [0, 2)$, da cui $\min H = \inf H = 0$ e $\sup H = 2$ (non è un massimo).

ix) Osserviamo innanzitutto che:

$$\left|\frac{5-n}{n+3}\right| = \begin{cases} \frac{5-n}{n+3} & \text{se } n \leq 5 \\ \frac{n-5}{n+3} & \text{se } n > 5 \end{cases}$$

Inoltre, la successione $\frac{n-5}{n+3}$ è crescente, in quanto $\frac{n-5}{n+3} = 1 - \frac{8}{n+3}$. Calcoliamo esplicitamente i primi termini di I (per $2 \leq n \leq 5$):

$$I = \left\{\frac{3}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, 0, \frac{5-n}{n+3} \text{ per } n > 5\right\}.$$

Possiamo dedurre che $\min I = \inf I = 0$, mentre $\sup I = 1$ (non è un massimo).

x) Ovviamente $\min L = \inf L = 1$. Vogliamo calcolare l'estremo superiore. Dimostriamo che:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} \quad \text{per ogni } n \in N. \tag{1}$$

Usando (1) segue facilmente che $\sup L = +\infty$.

Dimostriamo (1). Si può dimostrare per induzione. Per $n = 1$ è triviale. Assumiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \geq \quad \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

dove l'ultima disuguaglianza si dimostra facilmente elevando entrambi i membri al quadrato. $\square$

Esercizio aggiuntivo 1. Dire se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente o superiormente ed, in caso affermativo, trovare l'estremo inferiore o l'estremo superiore. Dire se si tratta di minimi o massimi.

i) $A := \left\{(-1)^n n + \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$;
ii) $B := \left\{n^2 - n :\ n \in \mathbb{Z}\right\}$;
iii) $C := \left\{n^2 - 5n + 3 :\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

Esercizio svolto 2. Siano $P, A > 0$. Considerare gli insiemi

$$\begin{aligned} E \quad &:= \quad \{\text{Area di un rettangolo } R \text{ t.c. Perimetro}(R)\text{=P}\} \\ F \quad &:= \quad \{\text{Perimetro di un rettangolo } R \text{ t.c. Area}(R)\text{=A}\}. \end{aligned}$$

Trovare l'estremo superiore ed inferiore di E ed F e dire se si tratta di massimi o minimi.

Soluzione. Denotiamo con $a, b > 0$ le lunghezze dei lati di un rettangolo $R_{a,b}$. Possiamo riscrivere gli insiemi E ed F nel seguente modo:

$$\begin{aligned} E \quad &:= \quad \{ab :\ a + b = P/2,\ a, b > 0\} \\ F \quad &:= \quad \{a + b :\ ab = A,\ a, b > 0\}. \end{aligned}$$

Dal momento che per ogni $a, b > 0$ si ha

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

allora $\frac{P^2}{16}$ è un maggiorante per E. In particolare, $\frac{P^2}{16}$ è un elemento di E (basta prendere $a = b = \frac{P}{4}$, che corrisponde al quadrato di perimetro P), quindi $\max E = \sup E = \frac{P^2}{16}$.
Per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, possiamo scegliere lati $a = \varepsilon$ e $b = \frac{P}{2} - \varepsilon$; l'area del corrispondente rettangolo sarà $ab = \varepsilon\left(\frac{P}{2} - \varepsilon\right) \leq \varepsilon\frac{P}{2}$. Questo dimostra che 0 è il più grande dei minoranti e quindi $\inf E = 0$ (ovviamente non è un minimo).

In maniera simile si dimostra che $\min F = \inf F = 4\sqrt{A}$ (che corrisponde al perimetro del quadrato di area A), mentre $\sup F = +\infty$.

Esercizio svolto 3. Sia A un insieme limitato superiormente. Definiamo $-A := \{-a : a \in A\}$. Dimostrare che $\inf A = -\sup(-A)$.

Soluzione. Denotiamo $\ell = \inf A$. Segue dalla definizione di estremo inferiore che:
a1) $\ell \le a$ per ogni $a \in A$;
a2) per ogni $m > \ell$, esiste un elemento $\bar{a} \in A$ tale che $m > \bar{a}$.
Dimostriamo che $-\ell$ è l'estremo superiore di $-A$:
- segue da (a1) che $-\ell \ge -a$ per ogni $-a \in -A$;
- sia $M < -\ell$; si cha che $-M > \ell$, quindi segue da (a2) che esiste $\bar{a} \in A$ tale che $-M > \bar{a}$. Di conseguenza $M < -\bar{a}$ e $-\bar{a} \in -A$, quindi M non può essere un maggiorante.

Questo dimostra che $-\ell$ è il più piccolo maggiorante per $-A$ e quindi è l'estremo superiore. $\square$

Esercizio svolto 4. Sia A un insieme limitato. Si definisca il *diametro di A* nel seguente modo:
$$\operatorname{diam} A := \sup\{|x-y| : x, y \in A\}.$$
Dimostrare che $\operatorname{diam} A = \sup A - \inf A$.

Soluzione. Siano $x, y \in A$. Possiamo assumere che $x \ge y$ (altrimenti basta invertire i ruoli). Segue dalla definizione di estremo superiore ed inferiore che $\sup A \ge x$ e $\inf A \le y$. Quindi:
$$\sup A - \inf A \ge x - y = |x-y| \qquad \forall\, x, y \in A.$$
Quindi $\sup A - \inf A$ è un maggiorante dell'insieme $\{|x-y| : x, y \in A\}$. Poiché l'estremo superiore è il più piccolo dei maggioranti, otteniamo:
$$\sup A - \inf A \ge \sup\{|x-y| : x, y \in A\} =: \operatorname{diam} A\,.$$
Vogliamo dimostrare ora che $\sup A - \inf A \le \operatorname{diam} A$. Supponiamo per assurdo che $\sup A - \inf A > \operatorname{diam} A$. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che:
$$\operatorname{diam} A < \sup A - \inf A - 2\varepsilon = (\sup A - \varepsilon) - (\inf A + \varepsilon). \tag{2}$$
Segue dalla definizione di sup ed inf che:
$$\exists\, \bar{x} \in A \text{ tale che } \sup A - \varepsilon < \bar{x} \qquad \text{e} \qquad \exists\, \bar{y} \in A \text{ tale che } \inf A + \varepsilon > \bar{y}.$$
Quindi sostituendo nella disuguaglianza (2) ottieniamo:
$$\operatorname{diam} A < (\sup A - \varepsilon) - (\inf A + \varepsilon) < \bar{x} - \bar{y} \le |\bar{x} - \bar{y}| \le \operatorname{diam} A,$$
che è una chiara contraddizione. Questo conclude la dimostrazione che $\operatorname{diam} A \ge \sup A - \inf A$. $\square$

Esercizio svolto 5. Dimostrare che ogni insieme finito ha un massimo ed un minimo.

Soluzione.
Sia $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$. Dimostriamo che A ha un massimo (si procede in maniera analoga per il minimo).
Innanzitutto, A è limitato superiormente. Se così non fosse, infatti, per ogni $M \in \mathbb{R}$ dovrebbe esistere un elemento di A maggiore di M. Partendo da $b_0 = a_1$, si potrebbe scegliere $b_1 \in A$ tale che $b_1 > b_0$. Iterando l'argomento si otterrebbe

una successione di elementi $b_n \in A$ tale che $b_n > b_{n-1}$. Questi elementi sarebbero ovviamente distinti, e ciò contraddirebbe il fatto che A è un insieme finito.

Sia $S = \sup A$. Vogliamo dimostrare che si tratta di un massimo, cioè che $S \in A$. Supponiamo per assurdo che $S \notin A$. Quindi $\delta_i := S - a_i > 0$ per ogni $a_i \in A$; scegliamo un $\varepsilon < \delta_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Segue dalla definizione di estremo superiore che $S - \varepsilon$ non può essere un maggiorante, quindi esiste $a_j \in A$ tale che $S - \varepsilon \leq a_j$. Quindi:

$$S - \varepsilon \leq a_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta_j = S - a_j < \varepsilon$$

che è chiaramente una contraddizione (avevamo scelto $\varepsilon < \delta_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$). Questo conclude la dimostrazione che $S \in A$ e quindi si tratta di un massimo.

Esercizio svolto 6. Siano A e B due insiemi. Definiamo

$$A + B := \{a + b : \ a \in A, \ b \in B\}.$$

Dimostrare che:

i) se A e B sono limitati superiormente, allora anche $A + B$ lo è e si ha:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B\,.$$

ii) Se A e B sono limitati inferiormente, allora anche $A + B$ lo è e si ha:

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B\,.$$

Soluzione.
Dimostriamo soltanto (i); la dimostrazione di (ii) è analoga.
Sia $\alpha = \sup A$ e $\beta = \sup B$. Vogliamo dimostrare che $\alpha + \beta$ è l'estremo superiore di $A + B$. Infatti:

- $\alpha + \beta$ è un maggiorante per $A + B$. Infatti, α è un maggiorante per A e β è un maggiorante per B, quindi:

$$\alpha + \beta \geq a + b \qquad \forall\, a \in A, \ b \in B.$$

- Dimostriamo che $\alpha + \beta$ è il più piccolo dei maggioranti per $A + B$. Sia $\varepsilon > 0$, dimostriamo che $\alpha + \beta - \varepsilon$ non può essere un maggiorante. Infatti:

$$\alpha + \beta - \varepsilon = (\alpha - \frac{\varepsilon}{2}) + (\beta - \frac{\varepsilon}{2}) \leq \overline{a} + \overline{b} \qquad \exists\, \overline{a} \in A, \ \overline{b} \in B.$$

  Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che α è il più piccolo dei maggioranti per A (quindi esiste $\overline{a} \in A$ tale che $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{a}$) ed in maniera analoga che β è il più piccolo dei maggioranti per B (quindi esiste $\overline{b} \in B$ tale che $\beta - \frac{\varepsilon}{2} \leq \overline{b}$).

Esercizio svolto 7. Dimostare che ogni polinomio di terzo grado ha almeno una radice reale.

Soluzione.
Possiamo assumere che il polinomio sia della forma $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. È sufficiente dimostrare che esistono $s < t$ tali che $P(s) < 0$ e $P(t) > 0$. Dimostriamo l'esistenza di s tale che $s^3 + as^2 + bs + c > 0$. In particolare, possiamo cercare tale valore nel semi–asse positivo $s > 0$. Si osservi che se $s > 1 - a$, allora:

$$\begin{aligned} s^3 + as^2 + bs + c \;&=\; s \cdot s^2 + as^2 + bs + c > (1 - a) \cdot s^2 + as^2 + bs + c = \\ &=\; s^2 + bs + c. \end{aligned}$$

Se assumiamo che $s > 1 - b$, si ottiene:

$$s^2 + bs + c > (1-b)s + bs + c = s + c.$$

In particolare, se $s > -c$ si avrà $s + c > 0$. In conclusione:

$$\text{se } s > \max\{0, 1-a, 1-b, -c\} \qquad \Longrightarrow \qquad P(s) > 0.$$

Dimostriamo ora l'esistenza di t tale che $P(t) < 0$.
Vogliamo trovare un valore di t per cui $t^3 + at^2 + bt + c < 0$. In particolare, possiamo cercare tale valore nel semi–asse negativo $t < 0$. Si osservi che, se $t < -1 - a$, allora

$$\begin{aligned} t^3 + at^2 + bt + c &= t \cdot t^2 + at^2 + bt + c < (-1-a)t^2 + at^2 + bt + c = \\ &= -t^2 + bt + c. \end{aligned}$$

Se assumiamo che $t < b - 1$, si ottiene:

$$-t^2 + bt + c < -(b-1)t + bt + c = t + c.$$

In particolare, se $t < -c$ si avrà $t + c < 0$. In conclusione:

$$\text{se } t < \min\{0, -1-a, b-1, -c\} \qquad \Longrightarrow \qquad P(t) < 0.$$