Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. U.Bessi

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 6 - 29 Aprile 2013

1. Far vedere che l'integrale della forma differenziale $\omega(x,y) = xdy$ sulla circonferenza parametrizzata da $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_0 + R\cos t \\ x_0 + R\sin t \end{pmatrix}$ é pari all'area della circonferenza.

2. Calcolare l'integrale della forma differenziale
$$\omega(x,y) = 2(x+y)xdx + 2(x+y)ydy$$
lungo l'arco della spirale di Archimede definito da $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(t) = \begin{pmatrix} kt\cos t \\ kt\sin t \end{pmatrix}$.

3. Trovare il pull-back della forma differenziale
$$\omega(x,y,z) = \frac{xzdx + yzdy - (x^2+y^2)dz}{(z^2+y^2+x^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
mediante la trasformazione $\psi : (0,+\infty) \times S^1 \times (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ tale che $\psi\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin\phi\cos\theta \\ \rho\sin\phi\sin\theta \\ \rho\cos\phi \end{pmatrix}$. Dimostrare che ω é esatta.

4. Determinare il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che la forma differenziale
$$\omega(x,y) = \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$
sia chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma \left(\sqrt{\frac{y+2}{x+2}}dx + \sqrt{\frac{x+2}{y+2}}dy \right)$$
dove $\gamma : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin^2 t \end{pmatrix}$.

6. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Su D si definisca la forma differenziale
$$\omega(x,y) = (x^2+y^2)\left[\frac{3x^2-y^2}{x^2y}dx + \frac{3y^2-x^2}{xy^2}dy\right].$$
Sia $\phi : (0,+\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow D$ tale che $\phi\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$.
Calcolare il pull-back ω^* di ω tramite ϕ.
Dire se ω^* é chiusa o se é esatta ed, in tal caso, calcolare il potenziale di ω^* e risalire al potenziale di ω.