

Tutorato di AM220

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. U.Bessi

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 4 - 15 Aprile 2013

1. Verificare che la mappa $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix}$ parametrizza la circonferenza unitaria intersecata con $x > 0$.

2. Sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva di \mathbb{R}^n . Dimostrare che:

$$\|\phi(b) - \phi(a)\| \leq L(\phi).$$

3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e continua.

Si definisca $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$.

Dimostrare che ϕ è rettificabile.

4. Si dia un disegno approssimativo dell' **astroide**, definito dalla mappa

$\phi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$.

Stabilire se la mappa è:

- Chiusa;
- Semplice;
- Regolare;

Se non fosse regolare stabilire i punti per cui si annulla la derivata di ϕ .

5. Sia $\phi : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\phi(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 \end{pmatrix}$.

Scrivere l'equazione della tangente a ϕ nel punto $\phi(1)$.

6. Calcolare la lunghezza della curva $\phi : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.c. $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}$.

7. Calcolare la lunghezza dell'arco di spirale logaritmica dato, in coordinate

polari, da $\phi : [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow (0, +\infty) \times S^1$ tale che $\phi(\theta) = \begin{pmatrix} a\theta \\ \theta \end{pmatrix}$.

Dimostrare che l'angolo che la tangente alla spirale in $\phi(\theta)$ forma con il raggio non dipende da θ .

8. (**Classico**) Quattro cani sono disposti ai vertici di un quadrato di lato 100 m; cominciano a rincorrersi alla velocità di 10 m/s.

Che curva percorrono? Dopo quanto tempo si incontrano?