AM210 2012-2013: II ESONERO

TEMA 1. Sia $f \in C^2(B_r(x))$, $B_r(x) \subset \mathbf{R}^n$, $H_f(x)$ la matrice Hessiana di f in x. Provare che

$$f(x+h) \; = \; f(x) + \; < \nabla f(x)\,,\, h > \; + \frac{1}{2} < H_f(x)\,h,\; h > \; + \circ\,(||h||^2)$$

Dedurre che, se $\nabla f(u) = 0$, allora: $\quad < H_f(x)\,h, h > \; > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n,\, h \neq 0, \quad \Rightarrow$ x é punto di minimo locale per f.

ESERCIZIO 1. Discutere la natura dei punti critici della funzione

$$f(x,y) := x^2 + y^4 - (x^2+y^4)^2$$

TEMA 2 Sia $B_r(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ ed $f : \overline{B_r(x_0)} \times [a,b] \to \mathbf{R}$. Enunciare teoremi sulla continuitá/derivabilitá della funzione $\quad x \to \int\limits_a^b f(x,t)\,dt \qquad x \in B_r(x_0)$.
Dedurre che se $f \in C([a,b]\times[c,d])$, allora son ben definiti ed eguali gli integrali

$$I := \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx, \qquad J := \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

ESERCIZIO 2. (i) Calcolare, usando il Tema 2, $\int\limits_0^\infty e^{-t^2} dt$.
(ii) Discutere continuitá e derivabilitá in $\mathbf{R}$ delle seguenti funzioni:

$$a) \quad f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} \sin(xy)dy \qquad\qquad b) \quad g(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-x^2 y}}{y} \sin(y)dy$$

TEMA 3 Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$, $\hat{f}_n, n \in \mathbf{Z}$ i suoi coefficenti di Fourier. Provare che

(i) Se $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}_n| < +\infty$ allora $\sum\limits_{|n|\le N} \hat{f}_n e^{int} \to f(t)$ uniformemente in $\mathbf{R}$

(ii) Enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Bessel per f e dedurre che se f é regolare a tratti allora f é somma uniforme della propria serie di Fourier.

ESERCIZIO 3. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) := (1+\cos x)^3 + x\cos x + \cos(x/2) \qquad x \in [0, 2\pi)$$

prolungata per periodicitá a tutto $\mathbf{R}$.

TEMA 4. Dare la definizione di spazio metrico completo e fornire un esempio di spazio metrico completo ed un esempio di spazio metrico non completo. Enunciare, e poi dimostrare il Teorema delle contrazioni in spazi metrici.
Infine, indicare come il Teorema delle contrazioni permetta di dimostrare, in opportune ipotesi, l'esistenza e l'unicitá locale della soluzione del problema di Cauchy associato ad un sistema di n equazioni differenziali in n incognite $x_j \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

ESERCIZIO 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\dot{x} = t(t-1)^{-2}x, \qquad x(2) = 1$$

o determinare l'integrale generale dell' equazione: $\qquad \dot{x} = (1+x^2)\sin t$

TEMA 5 Siano $a_{ij} \in C(\mathbf{R})$, $\quad i, j = 1, \dots, n$, $\mathcal{A} := (a_{ij})$. Provare che l'insieme $\mathcal{N}$ di tutte le soluzioni del sistema differenziale lineare a coefficenti variabili

$$Lx := \dot{x} - \mathcal{A}x = 0$$

é un sottospazio linare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione n. Data poi $\quad x^i, i = 1, \dots, n$ base di $\mathcal{N}$, e posto $\quad X(t) := \left(x^i_j(t)\right)$, $\quad$ provare che $\quad \det X(t) \neq 0 \quad \forall t$.
Indicare infine una rappresentazione di $\mathcal{X}$ nel caso i coefficenti a_{ij} siano costanti.
Date poi $\quad b_i \in C(\mathbf{R})$, $\quad i = 1, \dots, n$, $\quad b = (b_1, \dots, b_n)$, $\quad$ sia $\quad \overline{x}\quad$ una soluzione del sistema lineare non omogeneo

$$\dot{x} = \mathcal{A}x + b \qquad\qquad (**)$$

Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema lineare non omogeneo é dato da

$$\mathcal{N} + \overline{x} = \{\overline{x} + X(t)c : \quad c \in \mathbf{R}^n\}$$

Infine, determinare, a partire da una matrice fondamentale $\mathcal{X}$, una soluzione particolare $\overline{x}$ del sistema non omogeneo (*formula della variazione delle costanti)*.

ESERCIZIO 5. (i) Determinare l'integrale generale dell' equazione:

$$\ddot{x} - 8\dot{x} + 15x = e^{3t}$$

(i) Data $U \in C^2(\mathbf{R}^3, \mathbf{R})$, si consideri l'equazione di Newton $\quad \ddot{x}(t) = -\nabla U(x(t))$. Provare che, se esiste $c \in \mathbf{R}$ tale che $\quad U(x) \geq c \quad \forall x \in \mathbf{R}^3$, $\quad$ allora tutte le soluzioni di $\quad \ddot{x} = -\nabla U(x) \quad$ esistono per tutti i tempi. (*Suggerimento: si usi il carattere Hamiltoniano del sistema per stimare uniformemente* $\|\dot{x}(t)\|$).