AM210-2012/13: Tracce delle lezioni- IX Settimana

SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER

Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale sui complessi delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ che sono 2π periodiche e tali che $\Re f$ e $\Im f$ siano continue in $[-\pi, \pi]$. In $C_{2\pi}$ é definito il prodotto scalare e la relativa norma

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\, \overline{g} dt \qquad \|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt$$

Chiaramente, $< g, f >= \overline{< f, g >} \quad \forall f, g, \quad < f, \lambda g >= \overline{\lambda} < f, g >) \; \forall \lambda \in \mathbf{C}$. Continua a valere Cauchy-Schwartz (e quindi $\|f\|_2$ é effettivamente una norma), come si vede sciegliendo $\lambda =< f, g > \|g\|^{-2}$ nella diseguaglianza

$$0 \leq < f - \lambda g, f - \lambda g >= \|x\|^2 + |\lambda|^2 - \lambda < y, x > -\overline{\lambda} < x, y >$$

E vale anche Pitagora: $\quad < f, g >= 0 \quad \Rightarrow \quad \|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$. Quindi, essendo $e_n := \frac{1}{2\pi} e^{int}$ sistema ortonormale in $(C_{2\pi}, \|.\|_2)$, cioé $< e_i, e_j >= \delta_{ij}$ si ha che

$$\| \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$$

Polinomi e serie trigonometriche Dati $a_0, a_n, b_n \in \mathbf{R}$, possiamo loro associare il *polinomio trigonometrico*

$$P_N(t) := a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad t \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

che, posto $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ se $n \geq 1$ e $c_{-n} = \overline{c_n} = a_n + ib_n$ si scrive anche

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \qquad t \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Piú in generale, i c_n in (2) potranno essere arbitrari numeri complessi e P_N sará reale se e solo se $c_{-n} = \overline{c_n}$.
Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$, allora $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ converge, uniformemente, per $|z| \leq 1$. In particolare é definita la funzione o *serie trigonometrica*

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

Chiaramente, f é continua e 2π-periodica: $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ e

$$c_n =< f, e_n >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \qquad \|f\|_2^2 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

Definizione (coefficenti di Fourier). Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, restano definiti

$$\hat{f}_n :=< f, e_n >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad \textbf{(coefficenti di Fourier) di} \quad f$$

Definizione (serie di Fourier). Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \textbf{é serie di Fourier di} \quad f$$

f si dice **sviluppabile in serie di Fourier** se la sua serie di Fourier converge e

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \forall \quad t \in \mathbf{R}$$

Osservazione: se $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, i suoi coefficenti di Fourier sono complessi coniugati, e quindi la serie di Fourier associata é reale:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt \right) (\cos nt + i \sin nt) =$$

$$\tfrac{1}{2\pi}\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt) \cos nt + (\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt) \sin nt \right] +$$

$$\tfrac{i}{2\pi}\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt)\ \sin nt - (\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt)\ \cos nt \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt \right) \cos nt \ + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt \right) \sin nt$$

Sviluppabilitá in serie di Fourier. La serie di Fourier di una $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ non convergerá, in generale, neppure puntualmente! Un esempio di funzione sviluppabile in Serie di Fourier é dato dalla serie trigonometrica $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ nell'ipotesi che $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \right) e^{int} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

Teorema 1. *$f \in C_{2\pi}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \Rightarrow f$ é somma (uniforme) della propria serie di Fourier e* $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$ *(identitá di Parseval)*

É una conseguenza del

Principio di identitá. *Siano $f, g \in C_{2\pi}$. Se $\hat{f}_n = \hat{g}_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$, allora $f \equiv g$.*
Prova del Principio di identitá. Basta provare che

$$\hat{f}_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow f \equiv 0$$

Sia $P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$. Allora $0 = \hat{f}_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad \forall n \in \mathbf{Z} \Rightarrow 2\pi < f, P_N >= \sum_{n=-N}^{N} \hat{c}_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} = 0$. Sia ora $P_N, N \in \mathbf{N}$ successione di polinomi trigonometrici convergente uniformemente a f: $\hat{f}_n = 0 \quad \forall n \in \mathbf{Z}, \|\overline{P_N} - \overline{f}\|_\infty \to_{N \to +\infty} 0 \quad \Rightarrow$

$$0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f \overline{P_N} dt \to \int\limits_{-\pi}^{\pi} f \overline{f} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$

Prova del Teorema 1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad g(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}$ é in $C_{2\pi}$ ed ha gli stessi coefficenti di Fourier di f. La conclusione viene dal Principio di Identitá.

NOTA 1. Sia $f \in C_{2\pi}$. Se esiste $\alpha > \frac{1}{2}$ tale che $\sum\limits_n |n^\alpha \hat{f}_n|^2 < \infty$, allora $\sum\limits_n |\hat{f}_n| \leq \left(\sum\limits_n |n^\alpha \hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_n \frac{1}{n^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ e quindi f é sviluppabile in serie di Fourier. Applicheremo questo tipo di diseguaglianza per provare la sviluppabilitá in serie di Fourier di funzioni C^1. Premettiamo due fatti

Diseguaglianza di Bessel. Sia $f \in C_{2\pi}$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Prova Sia $P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}$. Da Pitagora, $\|P_N\|_2^2 = \sum\limits_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2$ mentre

$$< f, P_N >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f \overline{\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f e^{-int} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n} \hat{f}_n = \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2$$

e quindi, usando Cauchy-Schwartz $\quad \|P_N\|_2^2 =< f, P_N >\leq \|f\|_2 \, \|P_N\|_2 \quad \forall N$.

NOTA 2. Dunque $f \in C_{2\pi} \Rightarrow (\hat{f}_n) \in l^2$ e quindi $\hat{f}_n \to_{|n|\to\infty} 0$. In effetti si ha di piú

Lemma Riemann-Lebesgue. Se $|f|$ é integrabile in $[-\pi, \pi]$ allora $\hat{f}_n \to 0$.

Cenno di dimostrazione. La tesi é vera se esiste $f_k \in C_{2\pi}$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} |f_k - f| \to_0$. Infatti, in tal caso,

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon : \qquad \limsup_n |\hat{f}(n)| \le \limsup_n |\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| \le \epsilon \quad \forall k \ge k_\epsilon$$

perché $|\hat{f}(n) - \hat{f}_k(n)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f - f_k) e^{-int} \right| \le \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_k| \le \epsilon$ per $k \ge k_\epsilon$ opportuno. La tesi segue poi dal fatto che per ogni funzione assolutamente integrabile in $[-\pi, \pi]$ tali approssimanti esistono (cosa che qui non possiamo dimostrare).

Derivabilitá e decadimento dei coefficenti di Fourier

Scriveremo : $f \in C^k_{2\pi}(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \quad \Leftrightarrow \quad \Re f, \Im f \in C^k_{2\pi}(\mathbf{R})$ e $f' := (\Re f)' + i(\Im f)')$

Abbiamo visto che la continuitá di f (ma basterebbe meno!) implica $\sum_n |\hat{f}_n|^2 < \infty$ e quindi $\hat{f}_n = \circ(1)$. Vediamo ora come maggior regolaritá implichi piú rapido decadimento dei coefficenti di Fourier: sia $f \in C^k_{2\pi}$, allora, per periodicitá,

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) e^{-int} \right)' dt = \hat{f'}_n - i\, n\, \hat{f}_n \qquad \text{e quindi} \qquad \hat{f}_n = (\frac{1}{in})^k \left(\widehat{f^{(k)}} \right)_n \quad \forall n \ne 0$$

e quindi $\quad \sum_n |n^{k-1} \hat{f}_n| \le (\sum_n |n^k \hat{f}_n|^2)^{\frac{1}{2}} \, (\sum_{n \ne 0} \frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} < \infty \quad$ e quindi $\quad \hat{f}_n = \circ(|n|^{-k})$,

avendo usato Bessel per $f^{(k)}$. Usando tale proprietá (con $k = 1$) otteniamo

Teorema 2. *Ogni $f \in C^1_{2\pi}$ é somma uniforme della propria serie di Fourier.*

NOTA 3. Viceversa, piú é rapido il decadimento di $\hat{f}_n$ pú alta é la regolaritá di f:

$$\exists \alpha > \tfrac{1}{2} : \quad \sum |n|^{2(k+\alpha)} |\hat{f}_n|^2 < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum |n^k \hat{f}_n| \le$$

$$\le \left(\sum_n |n|^{2(k+\alpha)} \, |\hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_n \frac{1}{n^{2\alpha}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

e quindi la serie di Fourier di f converge uniformemente insieme alle sue prime k derivate e quindi $\quad f \in C^k$.

L'ipotesi C^1 su f nel Teorema 2 si puó indebolire chiedendo ad $f \in C_{2\pi}$ di essere C^1 ' a tratti', ovvero di essere C^1 al di fuori di un insieme discreto.

Teorema 2 bis (sviluppabilitá di funzioni regolari a tratti).

Sia $f \in C_{2\pi}$ dotata di derivata continua e limitata in $[-\pi,\pi]\backslash\{t_1 < t_2 < \ldots < t_p\}$. Allora f é somma uniforme della propria serie di Fourier.

Prova. Sia $\varphi \in C^1_{2\pi}$. Posto $s = t + \tau$, troviamo la 'formula di integrazione per parti'

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t+\tau) - f(t)}{\tau}\, \varphi(t)\, dt \;=\; -\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \frac{\varphi(s-\tau) - \varphi(s)}{-\tau}\, ds$$

Siccome, come é facile vedere, f é Lipschitziana (di costante $\sup_t |f'(t)|$) si puó passare al limite anche a primo membro, trovando

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'\varphi dt = -\int_{-\pi}^{\pi} f\varphi'$$

Presa $\varphi(t) = e^{-int}$, troviamo $\int_{-\pi}^{\pi} f'\varphi dt = in \int_{-\pi}^{\pi} fe^{-int}dt$ ovvero $\hat{f}_n = \frac{1}{in}\hat{f}'_n$. Siccome anche f' é di quadrato integrabile, anche per f' vale Bessel e quindi, come sopra, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty$.

NOTA 4. L'ipotesi di limitatezza su f' puó essere sostituita dalla equidominatezza del rapporto incrementale: $\exists g(t)$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|dt < \infty$ e $\left|\frac{f(t+\tau)-f(t)}{\tau}\right| \leq g(t) \quad \forall t, \tau$.

Il teorema 2 bis dice, in particolare, che se f é 2π periodica, Lipschitziana e 'regolare a tratti', allora f é somma (uniforme) della propria serie di Fourier. Si puó in effetti provare che ogni funzione Lipschitziana é somma uniforme della propria serie di Fourier.
In realtá, tale risultato vale per funzioni anche solamente Holderiane (di esponente α), tali cioé che

$$\exists \alpha \in (0,1],\ \exists c > 0: \quad |f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^\alpha \qquad \forall x, y$$

Teorema 3. Sia f una funzione Holderiana di esponente $\alpha > \frac{1}{2}$.

Allora $\quad \sum |n|^\beta |\hat{f}_n| < \infty \quad \forall \beta < \alpha - \frac{1}{2}, \quad$ e quindi la serie di Fourier di f converge uniformemente a f.

Convergenza puntuale nelle serie di Fourier (il criterio di Dini)

Coefficenti e serie di Fourier per funzioni discontinue integrabili.
Sia $I^2_{2\pi}$ lo spazio vettoriale sui complessi delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ che sono 2π periodiche e tali che $\Re f$ e $\Im f$ siano di quadrato integrabile in $[-\pi, \pi]$. Anche in $I^2_{2\pi}$, come in $C_{2\pi}$ é definito il prodotto scalare

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\, \overline{g} dt$$

Chiaramente, continuano a valere Cauchy-Schwartz e Pitagora.
Sono ugualmente definiti i coefficenti di Fourier di una $f \in I^2_{2\pi}$, dati da

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad n \in \mathbf{Z}$$

Anche in questo ambito piú generale continua a valere la diseguaglianza di Bessel:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \quad \forall f \in I^2_{2\pi}$$

Teorema 4 *(sviluppabilitá in serie di Fourier per funzioni Lipschitziane).*

Cominciamo con il considerare funzioni Lipschitziane e mostriamo che tali funzioni sono sviluppabili in serie di Fourier. Mostriamo, piú in generale, che, se $f \in C_{2\pi}$, allora la serie di Fourier di f converge a f in tutti i punti $\tau \in [-\pi, \pi]$ tali che

$$\exists \delta = \delta(\tau) : \qquad \sup_{|t| \leq \delta} \left| \frac{f(t + \tau) - f(\tau)}{t} \right| < \infty \qquad (*)$$

ovvero $\quad f(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} \quad$ in tutti i punti τ attorno ai quali il rapporto incrementale rimane limitato (proprietá che le funzioni Lip hanno in ogni punto).

Prova del Teorema 4. Sia $g(t) := f(t + \tau) - f(\tau)$. É $g \in C_{2\pi}$ e $\hat{g}_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \tau) e^{int} dt - f(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \hat{f}_n e^{in\tau} - f(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt$. Sommando, troviamo

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{in\tau} - f(\tau)$$

Mostriamo il risultato per g, ovvero che $0 = g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}_n$ e questo proverá il Teorema. Possiamo dunque, sostituendo eventualmente f con g, supporre che $\tau = 0$,

$f(0) = 0$, che $\frac{f(t)}{t}$ sia limitata in $[-\delta, \delta]$ e provare che

$$f(0) = 0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n$$

Scriviamo

$$F(t) := \frac{f(t)}{e^{it} - 1}, \qquad f(t) = F(t)e^{it} - F(t)$$

La funzione $F(t)$ é continua in $t \neq 0$ e limitata anche attorno a zero, perché $F(t) = \frac{f(t)}{t} \frac{t}{\cos t + i \sin t - 1}$ e $\frac{f(t)}{t}$ é limitata per ipotesi mentre $\frac{t}{\cos t + i \sin t - 1} = \frac{2t}{t^2 + i \sin t} \rightarrow_{t \to 0} \frac{2}{i}$ ed é quindi anche lei limitata e quindi di quadrato integrabile. Ma

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [Fe^{it} - F]\, e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Fe^{-i(n-1)t} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Fe^{-int} = \hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n$$

Da Bessel: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{F}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2 dt < \infty$ e quindi $F_n \rightarrow_{|n| \to \infty} 0$ e quindi

$$\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n = \sum_{n=-N}^{N} [\hat{F}_{n-1} - \hat{F}_n] = \hat{F}_{-N-1} - \hat{F}_N \rightarrow_N 0$$

NOTA. L'ipotesi $(*)$ si puó indebolire, chiedendo anche solo che

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(t+\tau) - f(\tau)}{t} \right| dt < \infty$$

La sola differenza nella dimostrazione é che la F é adesso solamente (assolutamente) integrabile.

Potremmo applicare direttamente il Lemma di Riemann-Lebesgue, mostriamo tuttavia che, siccome F é anche continua in $[-\pi, \pi]$, allora é chiaramente limite in media di una successione di funzioni continue. Basta infatti prendere una $\varphi(\mathbf{R}, [0,1]$ uguale a 1 in $[-1, 1]$ e porre $f_n(t) = f(t)\varphi(nt)$. Ed allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - f_n|(t) dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(t)|(1 - \varphi(nt)) dt \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(t)| \rightarrow_n 0$$

perché f é assolutamente integrabile. Dunque (vedi Lemma di Riemann-Lebesgue)

$$\hat{F}_{|n| \to \infty} \to 0$$

e questo basta, come sopra, per concludere.