AM210 2012-13: Tracce delle lezioni- II Settimana

SPAZI METRICI

Sia X un insieme. Una $\quad d : X \times X :\to [0, +\infty)$ tale che

$(i)\quad 0 \leq d(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n \qquad d(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = v$ (**positivitá**)
$(ii)\quad d(u, v) = d(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^n$ (**simmetria**)
$(iii)\quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^n$ (**diseguaglianza triangolare**)

si chiama **distanza o metrica** su X e (X, d) si chiama **spazio metrico** .

Metrica associata a una norma . Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora

$$d(u, v) := \|u - v\| \qquad \text{é una metrica su } V$$

Insiemi aperti, chiusi . Sia (X, d) spazio metrico. Siano $r > 0$ e $x_0 \in X$. Scriveremo

$$B_r(x_0) := \{x \in X : \; d(x, x_0) < r\}$$

$B_r(x_0)$ é la **palla aperta di raggio** r **e centro** x_0. Se V é spazio normato, é

$$B_r(x_0) = rB_1 + x_0 := \{rx + x_0 : x \in B_1\} = B_r + x_0 = \{x + x_0 : x \in B_r\}, \quad B_r := B_r(0)$$

$O \subset X$ é **aperto** se $\forall u \in O \;\exists r > 0 : \; B_r(u) \subset O$. $F \subset X$ é **chiuso** se F' é aperto.

SUCCESSIONI CONVERGENTI in uno SPAZIO METRICO

Sia (X, d) spazio metrico. Siano $x_k, x \in X$. Allora

$$x_k \to_k x \quad \Leftrightarrow \quad d(x_k, x) \to_k 0$$

Se V é spazio normato, $\quad v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_k - v\| \to_k 0.$

In $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea $\|.\|_2$: $\quad v_k \to_k v$ in $\mathbf{R}^n \Leftrightarrow \|v_k - v\|_2 \to_k 0.$
(i) Sia $u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}),\; u = (x_1, \ldots, x_n)$, allora

$$v_k \to_k v \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_j|^2 \to_k 0 \;\Leftrightarrow\; x_{k,1} \to_k x_1, \ldots, \; x_{k,n} \to_k x_n$$

(ii) $u_k \quad$ converge $\quad \Rightarrow \quad \sup_k \; ||u_k|| \; < \; +\infty \quad$ (ma non viceversa)
(iii) $u_k \to u, v_k \to v \quad \Rightarrow \quad tu_k + sv_k \to tu + sv \qquad \forall t, s \in \mathbf{R}$

In $C([a, b])$ con $\|f\|_\infty$: $\quad f_n \to f \Leftrightarrow f_n$ converge a f uniformemente in $[a, b]$.

CONTINUITÁ

Siano (X,d) e (Y,ρ) spazi metrici, $x_0 \in A \subset X$; una $f: A \to Y$ é continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad d(x,x_0) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \rho(f(x), f(x_0)) \leq \epsilon$$

ovvero $\forall \epsilon > 0, \exists \delta := \delta_\epsilon : \quad f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$.
f si dice continua in A se é continua in ogni punto di A. $C(A, \mathbf{R}^n)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A a valori in $\mathbf{R}^n$ ($C(A) := C(A, \mathbf{R})$).

UN ESEMPIO IMPORTANTE. Sia $(V, \|.\|)$ spazio normato. Allora $x \to \|x\|$ é funzione continua.

Segue da $| \, \|x\| - \|y\| \, | \ \leq \ \|x-y\| \qquad \forall x,y \in V$. Infatti, $\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \ \leq \|x-y\|$ e, scambiando x con y, $\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\|$.

Nota. Naturalmente in V puó esistere un'altra norma, diciamo $\|.\|_1$, che non é continua in $(V, \|.\|)$. Ad esempio, la norma $\|.\|_\infty$ su $C([0,1])$ dotato della norma integrale $\|.\|_1$ non é continua, perché, ad esempio, $\int_0^1 t^n dt \to_n 0$ ma $\sup_{t\in[0,1]} t^n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.
Che $\|.\|_\infty$ non sia continua segue allora dalla

Proposizione 1 Sia $f: A \to Y, \quad x \in A$. Allora
(i) f é continua in $x \quad \Leftrightarrow \quad (x_n \in A, \quad x_n \to_n x \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x))$
(ii) Se $Y = \mathbf{R}^m$ e $f = (f_1, \ldots, f_m), \quad f$ é continua in $x \Leftrightarrow$ le f_j sono continue in x.

La dimostrazione di (i) é come nel caso $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
La (ii) segue dal fatto che $f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_j(x_n) \to f_j(x)$ per $j = 1, \ldots, m$.

Proposizione 2

$$f \text{ é continua} \Leftrightarrow (O \in \mathcal{O} \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow (F \quad \text{chiuso} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(F) \quad \text{é chiuso})$$

$\Rightarrow$: sia $x \in f^{-1}(O)$, ovvero $f(x) \in O$ e quindi $B_\epsilon(f(x)) \subset O$ per un $\epsilon > 0$. Ma, per continuitá, esiste $\delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x)) \subset O$ e quindi $B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$.
$\Leftarrow$: $f^{-1}(B_\epsilon(f(x))$ aperto $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tale che $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x)) \Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ che dice appunto che f é continua in x.

Proposizione 3 Siano $A \subset \mathbf{R}^n$, $f, g: A \to \mathbf{R}^m$ continue in $u \in A$. Allora
(i) $\alpha f + \beta g$ é continua in $u \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$
(ii) se $m = 1$, fg é continua in u e, se $g(u) \neq 0$ anche $\frac{f}{g}$ é continua in u
(ii) se $f(A) \subset B$ e $\phi: B \to \mathbf{R}^p$ é continua in $f(u)$, allora $\phi \circ f$ é continua in u.

TRASFORMAZIONI LINEARI CONTINUE.

Siano $(E_i, \|.\|_i), i = 1, 2$ spazi normati, $L : E_1 \to E_2$ lineare. Allora:

(i) L é continua in $E_1 \quad \Leftrightarrow \quad L$ é continua in zero.
(ii) L é continua $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c = c_L$ tale che $\|Lx\|_2 \leq c\|x\|_1 \quad \forall x \in E_1$

Prova di $\Leftarrow$ in (i). Da L é continua in zero, segue che

$$u_n \to u \quad \Rightarrow \quad u_n - u \to 0 \quad \Rightarrow \quad Lu_n - Lu = L(u_n - u) \to 0$$

Prova di $\Rightarrow$ in (ii). Dalla continuitá di L in 0 segue che $\exists c > 0 : \quad \|u\|_1 \leq \frac{1}{c} \quad \Rightarrow$ $\|Lu\|_2 \leq 1$ e quindi

$$\|L(\frac{u}{c\|u\|_1})\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|Lu\|_2 \leq c\|u\|_1$$

Lo spazio $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

L'insieme delle trasformazioni lineari L tra due spazi lineari E_1 e E_2, dotato delle operazioni

$$(L_1 + L_2)(x) := L_1x + L_2x, \qquad (tL)(x) := tL(x)$$

é chiaramente lineare. Siccome, poi, la combinazione lineare di funzioni continue é anch'essa continua, l'insieme $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ delle trasformazioni lineari continue é spazio vettoriale. La funzione su $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ definita come

$$\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|, \qquad L \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$$

é, come é facile verificare, una norma su $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

NOTA **Non tutte le trasformazioni lineari sono continue.**

Esempio 1. $E = F = C([0, 1])$ e $\|f\|_E = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|, \quad \|f\|_F = \|f\|_\infty$, allora $Lf := f$, é continua da F in E ma non é continua da E in F: se $f_n(t) = t^n$, allora $\|f_n\|_E \to 0$ mentre $\|f_n\|_F \equiv 1$.
Esempio 2. Sia $C_0 = C_0(\mathbf{R}) = \{f \in C(\mathbf{R}) |\, \exists R = R(f) : |x| \geq R(f) \Rightarrow f(x) = 0\}$, $E = (C_0, \|.\|_\infty), F = (C_0, \|.\|_1)$. La $Lf := f$ non é continua né da E in F né da F in E: se $f \in C_0, f \neq 0$ e $f_n(x) := \frac{1}{n} f(\frac{x}{n})$, $\|f_n\|_\infty \to 0$ ma $\|f_n\|_1 \equiv \|f\|_1$ mentre se $f_n(x) := f(nx)$ é $\|f_n\|_1 \to 0$ mentre $\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty$.
Esempio 3. $Lf = f'$, $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbf{R}} |f(t)|$. Infatti, data $f \in C_0^\infty, \quad f \neq 0$ e, posto $f_n(t) := f(nt)$, é

$$\|f_n\|_\infty \equiv \|f\|_\infty, \qquad \|Lf_n\|_\infty = \|nf'\|_\infty = n \sup_{\mathbf{R}} |f'(t)| \to_n \infty$$

Ogni $l : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lineare é continua, ogni $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ lineare é continua

Per provarlo, supponiamo $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$ dotati della norma euclidea (ma, come vedremo, la cosa vale quali che siano le norme). Intanto,

$$\exists a \in \mathbf{R}^n : \quad l(x) =< a, x > \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

e quindi la continuitá di l segue da Cauchy-Schwartz: $|l(x)| \leq \|a\| \, \|x\|$.

La continuitá di L segue dal fatto che , se e_j, f_i sono basi canoniche in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$, allora L si scrive

$$L(x) = L(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j [\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i] = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f_i$$

per certi a_{ij}, cioé le componenti di L sono forme lineari , quindi continue. Ne deriva che L é continua.

ALTRI ESEMPI:

(i) i polinomi in $x_1, \ldots, x_n$, $exp(x_1^2 + \ldots + x_n^2), \sin(x_1 \ldots x_n)$, sono funzioni continue.

(ii) Sia $\quad f(x,y) := \frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2} \quad$ se $x^2 + y^2 \neq 0, \quad f(0,0) = 0$
Se $n \geq 4$, f é continua in $(0,0)$: $\quad |2xy| \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |\frac{xy^n}{(x^2+y^2)^2}| \leq \frac{y^2|y|^{n-3}}{x^2+y^2} \leq |y|^{n-3}$
Se $n = 3$, f é discontinua in $(0,0)$ perché $f(x, mx) = \frac{m^3}{(1+m^2)^2} \quad \forall x \neq 0$.
Se $n = 1, 2$, da $\quad f(x, mx) = \frac{m^3}{x^{3-n}(1+m^2)^2} \quad$ segue che $\quad f$ non é limitata attorno a $(0,0)$, $\quad$ e quindi non é continua in $(0,0)$ perché $\quad g$ continua in $u \quad \Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : \quad \|g(v)\| \leq \|g(v) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq 1 + \|g(u)\| \quad \text{se} \quad \|v - u\| \leq \delta.$$

Notiamo che, fissato y, $x \to f(x,y)$ é continua, e lo é anche $y \to f(x,y)$ per ogni fissato x, e ció quale che sia $n \in \mathbf{N}$. La 'continuitá in x ed y' é quindi una proprietá molto piú debole della 'continuitá nel complesso delle variabili'.

(iii) Sia $f(x,y) = xy \log(x^{2n} + y^{2m})$, $f(0,0) = 0$. Proviamo che f é continua (anche) in $(0,0)$. Possiamo supporre $|x| + |y| \leq 1$ e $n \geq m$. Da $|xy|^n \leq \frac{1}{2}(|x|^{2n} + |y|^{2n})$ segue $|xy \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq (|x|^{2n} + |y|^{2m})^{\frac{1}{n}} \log(x^{2n} + y^{2m})| \leq \epsilon$ se $(x^{2n} + y^{2m}) \leq \delta$ per un $\delta = \delta_\epsilon$ opportuno, perché $t^{\frac{1}{n}} \log t \to 0$ al tendere di t a 0^+.

LIMITI per funzioni reali di piú variabili reali

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{B}_r(u) = B_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{B}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ f(u) \geq M)$$

Se $B'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0,\ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \ u \in A,\ ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0,\ \exists R_M > 0 : \ u \in A,\ ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che
(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$
$(u_n \in A,\ u_n \neq u_0,\ u_n \to u_0 \ (|u_n| \to +\infty\ ) \ \Rightarrow \ f(u_n) \to \ l)$
(ii) (**Cauchy**) f ha *limite finito* l per u tendente a u_0 $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u, v \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists R_\epsilon > 0 : \ u, v \in A,\ |u|, |v| \geq R_\epsilon \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

ESEMPI . **(i)** Sia $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x, x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

(iii) Sia $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y^2}$ se $y \neq 0$. Se $x_n \to x \neq 0$ e $y_n \to 0$ allora $\frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\infty$ e quindi $\arctan \frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\frac{\pi}{2}$. Poi, siccome $f(x, \sqrt{|x|}) = (sign x)\frac{\pi}{4}$, la f non ha limite al tendere di (x, y) a $(0, 0)$.

SPAZI METRICI: ELEMENTI DI TOPOLOGIA

Sia (X,d) spazio metrico, $A \subset X$.
$x \in X$ é *interno* ad A ($x \in intA$) se $\exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$, *esterno* ad A se é interno ad A^c (il complementare di A) e $\partial A := \{x : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \neq B_r(x) \cap A \forall r > 0\}$ é l'insieme dei punti *frontiera* di A (∂A é la *frontiera* di A).

1. $O \subset X$ si dice **aperto** se $\forall u \in O \ \exists r > 0 : \ B_r(u) \subset O$, cioé se tutti i suoi punti sono punti interni. Indicheremo con $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti di (X,d).

2. $F \subset X$ si dice **chiuso** se F' (il complementare di F) é aperto. Ovvero, se contiene tutti i suoi punti frontiera.

3. (i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(ii) F_α chiusi, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\Rightarrow \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha$ e $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha$ sono chiusi

Prova. (i) $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \Rightarrow \exists \, \overline{\alpha}, \exists B_r(x) : \quad B_r(x) \subset O_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha$. Se $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$ esistono $B_{r_\alpha}(x) \subset O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_0$. Se $r \leq r_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{A}_0$ allora $B_r(x) \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} B_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha$

(ii) $\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \right)' = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F_\alpha \right)' = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

In particolare, se $\mathcal{F}_A$ indica la classe dei chiusi contenenti A, posto $\overline{A} : \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$, allora $\overline{A}$ é chiuso, ed é quindi il piú piccolo chiuso contenente A ($\overline{A}$ é la **chiusura** di A).

4. $F \subset X$ é **chiuso** $\Leftrightarrow \quad (u_k \in F, \ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F) \quad \Leftrightarrow \quad F = \overline{F}$.
Prova della prima equivalenza. $\Rightarrow$: Sia F chiuso, e siano $u_k \in F, \ u_k \to_k u$. Se $u \notin F$, allora $\exists r > 0 : \ B_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap B_r(u)$ definitivamente.
$\Leftarrow$: Per assurdo: F' non é aperto $\Rightarrow \exists u \in F'$ tale che $D_r(u) \cap F \neq \emptyset$ $\forall r > 0 \quad \Rightarrow$: $\forall k, \ \exists \ u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F \quad \Rightarrow \ u_k \in F$ e $u_k \to_k u \ \Rightarrow \ u \in F$.
Prova della seconda equivalenza. Se $F = \overline{F}$, allora F é chiuso perché $\overline{F}$ é chiuso. Viceversa, in primo luogo, $F \subset \overline{F}$; poi, $\overline{F} \subset F$ perché $\overline{F}$ é contenuto in ogni chiuso contenente F, ed F é chiuso.

5. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \, x_j \in A : \quad x_j \to_j x$.
Prova. Sia $x \in \overline{A}$ e supponiamo, per assurdo, che non ci sia $x_j \in A$ tale che $x_j \to x$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $(B_r(x))'$, essendo un chiuso contenente A, contiene $\overline{A}$, che contiene x: assurdo. Viceversa, se $x_j \in A : \quad x_j \to_j x$ e F é un chiuso contenente A, allora $x \in F$ e quindi, per l'arbitrarietá di F, $x \in \overline{A}$.

COMPLEMENTI E ESERCIZI

NORME EQUIVALENTI. Diremo che due norme $\|.\|_i, i = 1,2$ su di uno spazio vettoriale E sono tra di loro equivalenti se esistono $c \leq C$ costanti positive tali che

$$(*) \qquad c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Equivalentemente: $\|x_n\|_1 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\|_2 \to 0,$ ovvero l'identitá $Lx = x$ da $(E; \|.\|_1)$ a $(E; \|.\|_1)$ é continua insieme alla sua inversa.
Se vale la diseguaglianza di destra (di sinistra) diciamo che $\|.\|_1$ é piú forte (piú debole) di $\|.\|_2$.
Se invece nessuna delle due diseguaglianze in $(*)$ é verificata, le due norme si dicono non confrontabili.

Esercizio 1. Sia $E = l^1$. Siano $\|x\|_\infty = \sup\limits_j |x(j)|, \quad \|x\|_1 = \sum_j |x(j)| \quad \forall x \in l^1$. Provare che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in l^1$, ma non esiste alcuna $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_\infty \quad \forall x \in l^1$.
Soluzione Intanto, $\sum_j |x(j)| \geq |x(j)| \quad \forall j \in \mathbf{N}$ e quindi $\sum_j |x(j)| \geq \|x\|_\infty$. Poi, se x_n é la successione cosi definita: $x_n(j) = \frac{1}{j}$ se $j \leq n, \quad x_n(j) = 0$ se $j > n$, si ha $\|x_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $|\|x_n\|_1$ é la somma parziale ennesima della serie armonica, ed é quindi divergente.

Esercizio 2. Provare che in l^2 le norme $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ non sono equivalenti.

Esercizio 3. Provare che le due norme su $C_0^\infty(\mathbf{R})$ date da $\|f\|_\infty$ e $\|f'\|_\infty$ non sono confrontabili.

Soluzione Sia f tale che $\|f\|_\infty = 1$ e sia $f_n(x) = f(nx)$. Allora $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $\|f'_n\|_\infty = n\|f'\|_\infty \to \infty$. Viceversa, se $f_n(x) = nf(\frac{x}{n})$, allora $\|f'_n\|_\infty \equiv \|f'\|_\infty$ mentre $\|f_n\|_\infty = n\|f\|_\infty \to \infty$.

Esempi di insiemi aperti, chiusi. Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ allora $\{x : f(x) < c\} = f^{-1}(-\infty, c)$ e $\{x : f(x) > c\} = f^{-1}(c, +\infty)$ sono aperti per ogni $c \in \mathbf{R}$, in quanto preimmagini di intervalli aperti. In particolare:
la palla 'aperta' $B_r(x_0) := \{x : \quad d(x, x_0) < r\}$ e $\{x : \quad d(x, x_0) > r\}$ sono insiemi aperti
e quindi la palla 'chiusa' $\overline{B_r(x_0)} := \{x : \quad d(x, x_0) \leq r\}$ é un insieme chiuso.