AM210-2012/13: Tracce delle lezioni- X Settimana

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

SPAZI METRICI COMPLETI, SPAZI DI BANACH

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X, d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$$

(X, d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo, ovvero

$$x_n \in V,\ \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \text{ per } n, m \text{ grandi} \quad \Rightarrow \quad \exists x \in V : \quad \|x_n - x\| \to_n 0.$$

ESEMPI. 1. Sia (X, d) completo, $C \subset X$. Allora (C, d) é completo $\Leftrightarrow C = \overline{C}$.
2. $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea, é un Banach.
3. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. $C(K, \mathbf{R}^m)$, con $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$ é un Banach.
Prova. Siccome $f_n \to f$ uniformemente ($f_n = ((f_n)_1, \ldots, (f_n)_m)$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$) se e solo se $(f_n)_i \to f_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$ uniformemente, basta provarlo nel caso $n = 1$.
Ora, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon : \ n, m \geq n_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dunque, f_n é di Cauchy in $C(K, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in K$ la $n \to f_n(x)$ é di Cauchy $\Rightarrow \quad \forall x \in K,\ \exists$ (finito) $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Poi, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon :$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in K$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in K$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ \forall x \in K$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f, ovvero $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0$.
4. $E := C([a, b], \mathbf{R}^m)$ munito della norma della convergenza uniforme uniforme $\|\gamma\|_\infty := \max_{[a,b]} \|\gamma(t)\|$ ove $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$ é spazio di Banach (come in 3).

5. $C([a, b], \mathbf{R})$, munito della norma $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$ non é completo.

Ad esempio $(a = -1, b = 1)$, $\int_{-1}^{1} ||x|^{\frac{1}{n}} signx - signx| dx \to_n 0$ e quindi f_n é di Cauchy in $(C([-1, 1], \mathbf{R}), \|.\|_1)$, ma non esiste $g \in C([-1, 1], \mathbf{R})$ tale che $\|f_n - g\|_1 \to_n 0$.

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X,d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $T(C) \subset C$

(ii) $\exists k \in (0,1) : \quad d(Tx,Ty) \le d(x,y) \quad \forall\, x,y \in C$ (T é una **'contrazione'**)

allora $$\exists! x \in C : \qquad Tx = x$$

Unicitá: $Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y.$ Infatti,

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \le k\, d(x,y) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0 \quad \text{perché } k \in (0,1).$$

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $x_{n+1} = Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É

$$d(x_2,x_1) = d(Tx_1,Tx_0) \le kd(x_1,x_0)$$

Ugualmente, $d(x_3,x_2) = d(Tx_2,Tx_1) \le kd(x_2,x_1) \le k^2 d(x_1,x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) \le kd(x_n,x_{x_{n-1}}) \le k^n d(x_1,x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $$d(x_{n+p+1},x_n) \le d(x_{n+p+1},x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1},x_n) \le$$

$$\le \left[k^{n+p} + \ldots + k^n\right] d(x_1,x_0) \le k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1,x_0) \ \to_n 0$$

UN ESEMPIO. $f \in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tale che $|f'(x)| \le L < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$ é contrazione.

NOTA. La richiesta $k < 1$ in ii) é essenziale. Esempio: sia $c_0 = \{x \in l^\infty : x(n) \to_n 0\}$ (sottospazio chiuso di l^∞), $B := \{x \in c_0 : \|x\|_\infty \le 1\}$. $(B, \|.\|_\infty)$ é spazio metrico completo. Sia $T : B \to B$ cosí definita: $(Tx)(1) = 1$, $(Tx)(j) = x(j-1)$ se $j \ge 2$. Nota che $\|Tx\|_\infty = 1 \quad \forall x \in B$. Si ha $\|Tx - Ty\|_\infty = \|x - y\|_\infty \quad \forall x,y \in c_0$ ma T non ha punti fissi in B, perché $Tx = x \Rightarrow x(n) = 1 \ \forall n$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Equazioni differenziali lineari del I ordine

Date le funzioni $a(x), b(x)$ continue in (a, b) determinare, se esistono, le funzioni $y = y(x)$ di classe $C^1((a, b))$ tali che

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b) \qquad \textbf{(ED)}$$

(ED) si chiama equazione differenziale nella funzione incognita $y = y(x)$.
Tale equazione é **lineare** perché l'operatore (*differenziale*)

$$\mathcal{D} : C^1((a, b)) \to C((a, b)), \qquad (\mathcal{D}y)(x) := y'(x) + a(x)y(x)$$

é **lineare**, cioé $\mathcal{D}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{D}y_1 + \alpha_2 \mathcal{D}y_2$. Quindi l'insieme delle soluzioni di (ED) é $Ker\mathcal{D} + \overline{y}$ ove $\mathcal{D}\overline{y} = b$. In particolare, se $Ker\mathcal{D} \neq \{0\}$, ed (ED) ha soluzione, allora ne ha infinite.
(ED) é **del primo ordine** perché nell'equazione compare solo la *derivata prima.*
Come osservato, (ED), se ha una soluzione, ne ha infinite. Fissato peró $x_0 \in (a, b)$ (**'punto iniziale'**) e y_0 (**'valore iniziale'**), il problema

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad \forall x \in (a, b), \qquad y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

consistente nel trovare una soluzione di (ED) soddisfacente la **condizione iniziale, o di Cauchy** $y(x_0) = y_0$ ha, come vedremo, una ed una sola soluzione.
Tale problema viene chiamato **problema di Cauchy** associato ad (ED).

NOTA: Se $a \equiv 0$, (ED) diventa $y' = b$ e le sue soluzioni sono le primitive di b; **la continuitá di $b(x)$ é condizione sufficente ma non necessaria** per l'esistenza di una primitiva di b: se b é continua le primitive di b esistono e, per il Teorema Fondamentale del Calcolo (TFC), sono date, tutte, da

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)dt \qquad x_0 \in (a, b), \quad y_0 \in \mathbf{R}$$

Tale funzione é anche **l'unica soluzione del Problema di Cauchy (PC)**.
D'altra parte, la funzione

$$f(x) \ = \ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{se} \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 0 \qquad \text{é discontinua in zero}$$

ma é la derivata (in tutto $\mathbf{R}$) di $P(x) := x^2 \sin \frac{1}{x}$, $P(0) = 0$. Tuttavia,
la continuitá di $b(x)$ é essenziale: se $f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\forall x \neq 0$, $f(0) = c$, allora

$$P'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) = |x| + c \quad \Rightarrow \quad P'(0) \quad \text{non esiste.}$$

Condizione necessaria (Teorema di Darboux) ma non sufficente perché $b(x)$ ammetta primitiva é che b abbia la proprietá del valore intermedio (PVI). Ad esempio,

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\sin^2\frac{1}{x}$$

ha la (PVI), ma, come vedremo, non é dotata di primitiva su tutto $\mathbf{R}$. La sua primitiva, nulla in $x = 0$, é pari e, sui positivi, é data da $\quad P(x) := \int\limits_0^x \sin^2\frac{1}{t}dt = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty}\frac{\sin^2\tau}{\tau^2}d\tau.$ $\quad$ Ora, supposto che $P'(0)$ esista, deve valere, per paritá, zero. D'altra parte, se δ é tale che $\{x \in [0,\pi] : \sin^2 x \geq \delta\} = [\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi+1}{2}]$ (che ha lunghezza 1), e preso $x = \frac{1}{n\pi}$, troviamo

$$0 \;=\; P'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{x} = \lim_n \; n\pi\int\limits_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin^2\tau}{\tau^2}d\tau \;\;\geq$$

$$\lim_n \; n\delta\pi\sum_{k\geq n}\int\limits_{k\pi+\frac{\pi-1}{2}}^{k\pi+\frac{\pi+1}{2}}\frac{d\tau}{\tau^2} \;\;\geq\;\; \lim_n \;\frac{n\delta}{4\pi}\;\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^2} \;\;\geq\;\; \frac{\delta}{4\pi}$$

Dunque P non é derivabile in $x = 0$.

INTEGRALE GENERALE DI (ED)

Se y é soluzione di (PC), moltiplicando (ED) per $e^{\int_{x_0}^x a(t)dt}$, troviamo che

$$\left(y(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\right)' = [y'(x) + a(x)y(x)]e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\,b(x)$$

e quindi, per il TFC, $\quad y(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt} = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^t a(s)ds}b(t)dt \quad$ e quindi

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)dt}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} a(s)ds}b(t)dt\right]$$

Tale espressione, che fornisce al variare del parametro y_0 tutte le soluzioni di (ED), si chiama appunto Integrale Generale di (ED).

EQUAZIONI DIFFERENZIALI AUTONOME DEL I ORDINE

esistenza, unicitá, tempo di esistenza

Sia $f \in C((a,b))$. Trovare $x \in C^1(I)$, I intervallo opportuno, tale che

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \forall t \in I \qquad \textbf{(EDA)}$$

Tale equazione differenziale del primo ordine si chiama **autonoma** in quanto la variabile indipendente (qui indicata come t) non compare esplicitamente nell'equazione. Una particolare conseguenza di questo fatto é che

se $x(t), t \in (\alpha, \beta)$ é soluzione, allora anche $x(t-t_0), t \in (\alpha + t_0, \beta + t_0)$ é soluzione.

Per questa ragione l' istante iniziale viene convenzionalmente indicato con '$t = 0$' e la condizione di Cauchy si scrive quindi, usualmente, nella forma $x(0) = x_0$. Il Problema di Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad x(0) = x_0 \qquad \textbf{(PC)}$$

ha la seguente interpretazione 'dinamica': la soluzione $x(t)$ di (PC) indica la posizione al tempo t di un punto mobile (su $\mathbf{R}$) che si trova, al tempo 'iniziale' $t = 0$, nella posizione x_0, e che si muove con velocitá, all'istante t, data da $f(x(t))$ (la velocitá dipende cioé-solo- dalla posizione al tempo t).

1. Equilibri.

Se $f(x_0) = 0$, una soluzione é banalmente data dalla funzione costante $x(t) = x_0$ per ogni t . Siccome il 'punto mobile' $x(t)$ non si muove, la posizione x_0 si dice appunto di **equilibrio**.

2. Esistenza e unicitá locale se $f(x_0) \neq 0$.

Determinazione di una soluzione di (PC). Possiamo supporre $f(x_0) > 0$. Sia (a,b), $-\infty \leq a$, $b \leq +\infty$, il piú grande intervallo contenente x_0 su cui risulta $f(x) > 0$. É allora definita in (a,b) la funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}, \quad x \in (a,b)$$

Ovviamente, $F'(x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in (a,b)$. Ora, se $x(t)$ é soluzione di (PC), allora $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{\dot{x}(t)}{f(x(t))} \equiv 1$ e quindi, integrando tra 0 e t,

$$F(x(t)) = t \quad \text{ovvero} \quad x(t) = F^{-1}(t), \quad t \in (F(a), F(b))$$

Siccome

$$\frac{d}{dt}F^{-1}(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t)) \quad \forall t \in (F(a), F(b)) \quad \text{e} \quad F^{-1}(0) = x_0$$

(PC) ha una e una sola soluzione in $(F(a), F(b))$**:** $\qquad x(t) = F^{-1}(t)$.

Notiamo che $\mathcal{I}m\ x = \mathcal{I}m\ F^{-1} = \mathcal{D}F = (a, b)$ ovvero gli 'estremi' della traiettorie $x(t)$ sono, se finiti, equilibri.

3. $f(x_0) = 0$**: Unicitá/non unicitá locale.** La soluzione costante,

$$x(t) = x_0 \quad \forall t, \qquad \textit{non é in generale l'unica soluzione:}$$

se x_0 é uno zero isolato di f e l'integrale $\int_{x_0}^{x} \frac{ds}{f(s)}$ esiste in senso generalizzato (e questo accade se $f(x) = O(|x - x_0|^\delta)$ per un $\delta \in (0, 1)$) allora la formula al punto 2 continua a fornire una soluzione (non costante) di (PC). Di fatto, ci sono infinite soluzioni di (PC). Vediamo esempi di (PC) con **infinite soluzioni:**

$$(k) \qquad \dot{x} = x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0, \qquad (kk) \qquad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0$$

(k) Per ogni $t^+ > 0$ c'é una soluzione che passa per zero al tempo t^+: se $F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}}$ la soluzione (non costante) $x(t)$ che in t^+ vale zero é data implicitamente dall'equazione $\quad F(x) = t - t^+ \quad$ e quindi

$$x(t) = F^{-1}(t) = \left(\frac{t - t^+}{3}\right)^3$$

Analogamente si trova la soluzione non di equilibrio che vale zero al tempo $t^- < 0$: $x(t) = \left(\frac{t-t^-}{3}\right)^3$. Tali soluzioni si incollano per dare origine a tutte le soluzioni che passano per $x = 0$ al tempo $t = 0$ *(il pennello di Peano)*:

$$x(t) = \left(\frac{t - t^-}{3}\right)^3 \chi_{(-\infty, t^-]} + \left(\frac{t - t^+}{3}\right)^3 \chi_{[t^+, +\infty)} \qquad t^- \le 0 \le t^+$$

(kk) In modo del tutto analogo si trova che le soluzioni passanti per $x = 0$ al tempi $t = 0$ sono tutte e solo della forma

$$x(t) = -\left(\frac{t - t^-}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty, t^-]} + \left(\frac{t - t^+}{2}\right)^2 \chi_{[t^+, +\infty)}, \qquad t^- \le 0 \le t^+$$

É tuttavia facile mostrare che *se f é localmente Lipschitziana allora la soluzione del Problema di Cauchy é (localmente) unica.* Basta mostrarlo per le soluzioni passanti per un equilibrio (possiamo supporre che vi passino per $t = 0$). Supponiamo dunque che

$$f(x_0) = 0, \quad \exists c > 0 : \quad |f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0| \quad \forall x \quad \text{vicino a } x_0$$

Allora, se $x(t)$ é soluzione con $x(0) = x_0$, si ha che, per $\quad t \in [0, \delta]$,

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \;\Rightarrow\; x(t) - x_0 = \int_0^t f(x(\tau))d\tau \quad \Rightarrow \quad |x(t) - x_0| \leq \int_0^\delta |f(x(\tau))|d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^\delta c|x(\tau) - x_0|d\tau \leq c\delta \sup_{0\leq\tau\leq\delta} |x(\tau)| \quad \Rightarrow \quad \sup_{0\leq t\leq\delta} |x(t) - x_0| \leq c\delta \sup_{0\leq t\leq\delta} |x(t) - x_0| \quad \Rightarrow$$

$x(t) = x_0 \quad \forall t \in [0, \delta] \quad$ se $\quad c\delta < 1$.

4. Tempi di esistenza.

Se $f \in C(\mathbf{R})$, $f(a) = f(b) = 0$, $f > 0$ in (a, b), il problema di Cauchy $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ ha, nell'intervallo $\left(-\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)}, \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)}\right)$ una ed una sola soluzione data da $x(t) = F^{-1}(t)$, $\quad F(x) := \int_{x_0}^x \frac{ds}{f(s)}$, $\quad x \in (a, b)$. Se $\int_a^{x_0} \frac{ds}{f(s)} = \int_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)} = +\infty$, **la soluzione é definita per tutti i tempi** e tende, per $t \to \pm\infty$ a b, rispettivamente, a e si dice che la soluzione **esiste globalmente**.
Se invece $b = +\infty$ e $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty$ (il ché accade se f diverge piú che linearmente) la soluzione non é definita per tutti i tempi si dice che la soluzione **esplode in tempo finito** (nel futuro; ci sará esplosione in tempo finito nel passato se $\int_{x_0}^a \frac{ds}{f(s)} > -\infty$).
Ad esempio per le seguenti equazioni differenziali (prive di equilibri)

$$(i)\; x' = e^x, \quad (ii)\; x' = e^{-x}, \quad (iii)\; x' = \sqrt{1 + x^2} \quad (iv)\; \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (v)\; \dot{x} = \cosh^2 x$$

e soggette alla condizione iniziale $x(0) = 0$ oppure $x(0) = x_0$, si ha

(i) $\quad F(x) = 1 - e^{-x}$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = -\log(1 - t)$ é definita in $(-\infty, 1)$
(ii) $\quad F(x) = e^x - 1$ e quindi la soluzione $x(t) = F^{-1}(t) = \log(t + 1)$ é definita in $(-1, +\infty)$
(iii) $\quad F(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \sinh^{-1} x \quad$ e quindi la soluzione $\quad x(t) = F^{-1}(t) = \sinh t$ é definita per tutti i tempi.

(iv) $F(x)=\int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\log(x+\sqrt{1+x^2}\right)$. La soluzione $x(t)=F^{-1}(t)$ é definita per tutti i tempi perché $F((-\infty,+\infty))=(-\infty,+\infty)$

(v) $F(x)=\int\limits_{x_0}^x \frac{ds}{\cosh^2 s} = \tanh x - \tanh x_0$ e quindi la soluzione $x(t)=F^{-1}(t)=\tanh^{-1}(t+\tanh x_0)$ é definita in $(-1-\tanh x_0, 1-\tanh x_0)$. Questo mostra in particolare che l'intervallo di esistenza dipende dal valore iniziale x_0.

Sia $f\in C^1(\mathbf{R})$. Se $a<b$ sono due zeri consecutivi di f e $x_0\in(a,b)$ allora la soluzione di $x'=f(x)$, $x(0)=x_0$ é definita per tutti i tempi perché gli integrali $\int\limits_{x_0}^a \frac{ds}{f(s)}$ e $\int\limits_{x_0}^b \frac{ds}{f(s)}$ divergono entrambi. Se $f(x)>0$ in $(b,+\infty)$ la soluzione é definita per tutti i tempi se e solo se $\int\limits_b^{+\infty} \frac{ds}{f(s)}=+\infty$. In caso contrario la soluzione é definita nell'intervallo (dipendente da x_0!) dato da $(-\infty, \int\limits_b^{+\infty}\frac{ds}{f(s)})$. Ad esempio, nel problema

$$x'=\frac{1}{2}(1-x^2), \qquad x(0)=x_0$$

troviamo $F(x)=\int\limits_{x_0}^x \frac{2ds}{1-s^2} = \int\limits_{x_0}^x\left[\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right]ds = \log\left[\frac{1+x}{1+x_0}\,\frac{1-x_0}{1-x}\right]$ e vediamo che

$$F(-\infty,-1)=F(1,+\infty)=(-\infty,\log\frac{x_0-1}{x_0+1}), \quad F(-1,1)=(-\infty,+\infty))$$

che sono i domini della soluzione $x(t)=F^{-1}(t)$ se, rispettivamente, $|x_0|>1, |x_0|\le 1$. Ció lo si vede anche dalla forma esplicita della soluzione del problema di Cauchy

$$x(t)=\frac{e^t+\frac{x_0-1}{x_0+1}}{e^t-\frac{x_0-1}{x_0+1}}$$

4. Non unicitá per tempi grandi. Mostriamo con degli esempi che, pur in presenza di una unica soluzione locale (cioé 'per tempi piccoli') l'unicitá puó venire a mancare globalmente (cioé 'per tempi grandi').

(i) Consideriamo il problema $\dot{x}=x^{\frac{2}{3}}, \qquad x(0)=-1.$

Qui, con le notazioni usate al punto 1, $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$,

$$F(x)=\int_{-1}^x \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}} = 3x^{\frac{1}{3}}+3, \quad x\in(-\infty,0), F(-\infty)=-\infty, F(0)=3$$

Il problema dato ha ha come *unica soluzione in* $(-\infty, 3)$ la funzione

$$x(t) := F^{-1}(t) = (\frac{t-3}{3})^3, \qquad (-\infty, 3)$$

Tale soluzione puó peró essere prolungata su tutto **R** cosi:

$$\forall t_0 \geq 3 : \qquad x(t, t_0) := (\frac{t-3}{3})^3 \chi_{(-\infty,3)} + (\frac{t-t_0}{3})^3 \chi_{[t_0,+\infty)}$$

Con verifica diretta: queste sono tutte soluzioni del problema di Cauchy dato.

(ii) Troviamo tutte le soluzioni di $\quad \dot{x} = \sqrt{|1-x^2|}, \quad x(0) = 0.$

Sia, per $x \in (-1, 1)$, $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin x$. Dunque $x = \sin t$ é soluzione in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Per $x > 1$ é $\quad F(x) := \int\limits_0^x \frac{ds}{\sqrt{|1-s^2|}} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \frac{\pi}{2} + \cosh^{-1} x$ e quindi $x(t) = F^{-1}(t) = \cosh(t - \frac{\pi}{2})$ per $t \geq \frac{\pi}{2}$.

Infine, per $\quad t \leq 0, \qquad (-x(-t))' = x'(-t) = \sqrt{|1 - [(-x)(-t)]^2|} \qquad$ e quindi $x(t) = \sin t$ in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ e $x(t) = -\cosh(t + \frac{\pi}{2})$ se $t \leq -\frac{\pi}{2}$.

Ma, come si verifica derivando, per ogni $t^+ \geq \frac{\pi}{2}$ la funzione

$$x(t) = \chi_{[0,\frac{\pi}{2}]} \sin t + \chi_{[\frac{\pi}{2},t^+]} + \chi_{[t^+,+\infty)} \cosh(t - t^+)$$

é soluzione in $[0, +\infty)$ e $-x(-t)$ lo é in $(-\infty, 0]$.

(iii) Il problema $\quad \dot{x} = \sqrt{|x|}, \qquad x(0) = x_0 > 0.$

Sia $x(t)$ soluzione; $\dot{x}(t) \geq 0$ e quindi $x(t)$ é non decrescente.

Da $\quad \left(2\sqrt{x(t)}\right)' = 1, \quad$ segue, integrando, $\sqrt{x(t)} = \sqrt{x_0} + \frac{t}{2}$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, e quindi $\quad x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ se $t \geq -2\sqrt{x_0}$, cioé tale funzione é *l'unica soluzione del problema di Cauchy dato nell'intervallo di tempo* $(-2\sqrt{x_0}, +\infty)$.

Una verifica mostra che $\quad x(t) = -\left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$ é soluzione in $t \leq -2\sqrt{x_0}$. Dalla derivabilitá di

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{x_0}]}$$

segue che tale funzione é soluzione, definita su tutto **R**. **Ma non é l'unica!** Infatti

$$x(t) := \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{[-2\sqrt{x_0},+\infty)} - \left(\sqrt{\xi_0} + \frac{t}{2}\right)^2 \chi_{(-\infty,-2\sqrt{\xi_0}]}$$

é un'altra soluzione del medesimo problema di Cauchy quale che sia $\xi_0 \geq x_0$.

ESEMPI COMPLEMENTI ED ESERCIZI

ESEMPI

1. $l^p := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} | \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$ é, se $p \geq 1$, il sottospazio (lineare) di l^∞ delle **successioni di potenza p-esima sommabile**. Una norma su l^p é

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Per vedere che $\|.\|_p$ é effettivamente una norma basta verificare la diseguaglianza triangolare. Intanto, vale la **diseguaglianza di Holder**: se $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\ |y(n)| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, x \in l^p,\ y \in l^q$$

Infatti, dalla diseguaglianza di convessitá

$$p, q > 1, \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |xy| \leq \tfrac{|x|^p}{p} + \tfrac{|y|^q}{q} \quad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

segue

$$\frac{|x(n)|}{\|x\|_p}\frac{|y(n)|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|x(n)|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y(n)|^q}{\|y\|_q^q} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\ |y(n)|}{\|x\|_p\ \|y\|_q} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

Siccome $q = \frac{p}{p-1}$, da Holder deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1}|x(n)|\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1}|y(n)|\right) \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|y\|_p$$

e quindi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

cioé la diseguaglianza triangolare, qui anche detta **diseguaglianza di Minkowskii**.

2. (la funzione 'distanza da un punto' é continua) Fissato $x_0 \in X$ spazio metrico, la funzione 'distanza da x_0',

$$d_{x_0} : X \to \mathbf{R}, \qquad d_{x_0}(x) := d(x, x_0)$$

é Lipschitziana (e quindi continua) perché

$$d(x,x_0) \le d(x,y) + d(x_0,y), \qquad d(y,x_0) \le d(x,y) + d(x,x_0) \qquad \Rightarrow$$

$$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \le d(x,y)$$

In particolare ció implica che $\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \quad d_{x_0}(x) = d(x,x_0) \le r\}$ ('palla chiusa' di centro x_0 e raggio $r > 0$) é un insieme chiuso, grazie alla seguente proprietá:

se X, Y sono spazi metrici e $f : X \to Y$ é continua , allora
$O \subset Y$ **aperto,** $F \subset Y$ **chiuso** $\Rightarrow f^{-1}(O)$ **é aperto e** $f^{-1}(F)$ **é chiuso**

Infatti $x_n \in f^{-1}(F), x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \in F$ e $f(x_n) \to_n f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$ cioé $f^{-1}(F)$ é chiuso. L'altra affermazione segue dal fatto che $[f^{-1}(O)]^c = f^{-1}(O^c)$.

3 (diseguaglianza di Cauchy-Schwartz). $b(f,g) := \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$ é un prodotto scalare in $C([a,b],\mathbf{R})$ e vale quindi la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|\int\limits_a^b f(t)g(t)dt| \le \left(\int\limits_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Inoltre, $C([a,b],\mathbf{R})$, munito della norma $\|f\|_2 = \left(\int\limits_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ non é completo.

4 (diseguaglianza di Holder). Vale la piú generale diseguaglianza di Holder: se $p, q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora

$$|\int\limits_a^b f(t)g(t)dt| \le \left(\int\limits_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f, g \in C([a,b],\mathbf{R})$$

5. $\quad l^p, \quad p \ge 1$ é completo.

6. $\quad l^\infty$ é completo.

7: (lo spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$) Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue e 2π periodiche. Allora $\|f\|_\infty := \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ é una norma su $C_{2\pi}$, che, munito di tale norma, risulta completo.

Inoltre, $\quad \|f\|_2 := \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ é una norma su $C_{2\pi}$ e vale Cauchy-Schwartz:

$$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ESERCIZI

1. La chiusura di l^1 in l^∞ é $c_0 := \{x \in l^\infty | \quad x(n) \to_n 0\}$.

Infatti c_0 é chiuso perché se $x_j \in c_0$ e $\|x_j - x\|_\infty \to_j 0$ ovvero $\sup\limits_n |x_j(n) - x(n)| \leq \epsilon$ per $j \geq j_\epsilon$ allora

$$|x(n)| \leq |x(n) - x_{j_\epsilon}(n)| + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq 2\epsilon$$

se n é tale che $|x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon$ ovvero per tutti gli n abbastanza grandi e quindi $x \in c_0$. Ma se $x \in c_0$ e $x_j(n) := x(n)$ se $n \leq j$ e $x_j(n) = 0$ se $n > j$, allora $\|x - x_j\|_\infty = \sup\limits_{n>j} |x(n)| \to_j 0$.

2. Sia $e_i : j \to \delta_{ij}, i, j \in \mathbf{N}$. Sia X la varietá lineare generata dagli e_i. Provare che la chiusura di X in l^∞ é c_0.

3. Sia X come in 2. Provare che X é densa in l^p per ogni p.

Infatti, se $x \in c_0$, sia $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$. Allora $\|x - x_n\|_\infty = \sup\limits_{j>n} |x(j)| \to_n 0$. Poi, dato $x \in l^p$, se $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$, allora $\|x - x_n\|^p = \sum_{j>n} |x(j)|^p \to_n 0$.

4. Sia $E = C([a,b], \mathbf{R})$ dotato dell norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b])} |f(x)|$.
Provare che la funzione (lineare in $f \in C([a,b])$)

$$l(f) := \int\limits_a^b f(x)dx$$

é definita su E ed é continua da E ad $\mathbf{R}$.

5. (i) Provare che $C_0(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza uniforme $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$ non é completo.
Provare poi che $V := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad f(x) \to_{|x|\to\infty} 0\}$ dotato della norma della

convergenza uniforme é completo, e che $C_0(\mathbf{R})$ é denso in V.

(ii) Provare che $C_0^\infty(\mathbf{R})$ dotato della norma della convergenza in media $\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|dt$ non é completo.
Provare che $\|.\|_1$ non é una norma su V.
Provare che $\|.\|_1$ é una norma in $W := \{f \in C(\mathbf{R}) : \quad \int_{\mathbf{R}} |f| < \infty\}$ e che W, dotato di tale norma, non é completo.

6. Sia $k \in C([a,b] \times [c,d])$. Per ogni $f \in c([a,b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(x,t)f(x)dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c,d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[a,b])} |\int_a^b k(x,t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t)\in[a,b]\times[c,d])} |k(x,t)| \right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a,b], \mathbf{R})$ a $C([c,d], \mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.