

Tutorato di AM120

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 6 - 25 Marzo 2013

1. Scrivere lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Sfruttando il risultato ottenuto, calcolare $\log 2$ con un errore inferiore a 10^{-3} .

2. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo dell'intervallo di convergenza:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} x^n$	(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n} x^n$	(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \right)^n x^n$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{10}} x^n$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n} \right)^n x^n$	(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos(e^{-n}) - 1) x^n$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} x^n$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} x^n$	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4 \log n}}{x^n}$

3. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

(a) $\frac{3-i}{(i+1)^2} - \frac{1}{1-i}$	(c) $\frac{2i}{i-5}$
(b) $\frac{1}{i-1} + \frac{2i}{1-i}$	(d) $\frac{1}{(1-i)^2} - i$

4. Dimostrare che se $|z| = 1$, allora $\left| \frac{3z-i}{3+iz} \right| = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

5. Calcolare parte reale ed immaginaria di:

• $\sin z$	• $\tan z$	• $\cosh z$
• $\cos z$	• $\sinh z$	• $\tanh z$

6. Scrivere in forma polare i seguenti numeri complessi:

(a) $1 - i$	(c) $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 - \sqrt{3} \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^3$
(b) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$	(d) $-2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

7. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze e discuterne il comportamento sul bordo del disco di convergenza:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2 + e^{in}} & \text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i-1)^n}{n!} z^n \\ \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} (3 + i^n)^n z^n & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{i^n n^2} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(in) z^n \end{array}$$

8. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x^3} & \text{(c)} \log\left(\frac{x^2}{2-x}\right) & \text{(e)} |x-2|e^x \\ \text{(b)} x\sqrt[3]{x-x^2} & \text{(d)} \frac{2x}{-1+\log x} & \text{(f)} e^{\sin x} \end{array}$$