Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2012-2013 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutori: Emanuele Padulano e Francesco Mazzarani

Tutorato 11 - 20 Maggio 2013

1. Calcolare:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}} + 2xe^{-x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x}(2x+1)}$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$

2. Discutere la convergenza dei seguenti integrali:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \log x\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

(e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \tan x\ \log x^2\, dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x^2}\, dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh x}\, dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(x^x-1)\cos x}{\sin x}\, dx$

(j) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-4)}$

3. Discutere la convergenza dei seguenti integrali al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1+\alpha\cos x)\, dx$

(e) $\displaystyle\int_2^{3} \frac{x(\sin(x-2))^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}$

4. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ \arctan x\ \sinh x}{(x^8+1)\ e^{x^2}\ (\cos(x^4+x^2+2)+2)}\, dx$$

5. Risolvere i seguenti problemi:

   (a) Date $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$, calcolare l'area compresa tra esse e la retta $x = \frac{7}{4}$;
   (b) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse x e dalle parabole $y = x^2 + 4x + 4$ e $y = x^2 - 4x + 4$;
   (c) Calcolare l'area racchiusa tra la circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine e la funzione $y = 3|x|$.

6. Dimostrare che:

   - Se f é pari, allora $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ é dispari;
   - Se f é dispari, allora $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ é pari.

7. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ e mostrare in generale che, detto $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ $\forall n \geq 2$, si ha che

$$I_n = \frac{1}{2n-2}\left[(2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}\right].$$

8. (**Malus**) Calcolare:

   - $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1+2x^2}{1+x^2}}\ dx$
   - $\displaystyle\int_0^1 x^n \arctan x\ dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}$