AM120 2012/2013

APPELLO SETTEMBRE

TEMA/ESERCIZIO 1 Sia $f \in C^2(I)$, I intervallo in $\mathbf{R}$. Stabilire, argomentando, se é vero che

(i) f é nondecrescente in I sse $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
(ii) f é convessa in I sse $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

Sia $a \in \mathbf{R}$, $\quad f_a(x) := e^x - x - ax^2, \quad x > 0.$
Stabilire per quali valori di a f_a é non decrescente, f_a é convessa.
Provare che esiste un a_0 tale che l'equazione $f_a(x) = 0$ ha
-zero soluzioni se $a < a_0$,
- esattamente una soluzione per $a = a_0$,
-esattamente due soluzioni per $a > a_0$.

TEMA/ESERCIZIO 2 Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funzione analitica. Provare che se $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ allora f é costante in $\mathbf{R}$. Stabilire poi, argomentando, se le affermazioni seguenti sono vere o false:

(i) $f^{(k)}(\infty) := \lim_{|x| \to +\infty} f^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f$ é costante
(ii) $f(0) = f(1), f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x+1) \quad \forall x \in \mathbf{R}$

Determinare l'insieme E su cui converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\sin(nx)}{n!}$ e, posto $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\sin(nx)}{n!}, x \in E$, stabilire se f é continua, C^∞, analitica, in E.

TEMA 3 Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Provare il TFC:

$F(x) := \int_0^x f(t)dt$ é derivabile e risulta $F' = f$

Provare, eventualmente usando il TFC, che

$f \in C^1(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)dt$ (formula di Torricelli-Newton)

$f \in C^1(\mathbf{R})$ e $f'(x) \geq c > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad xf(x) \geq xf(0) + cx^2 \quad \forall x$

$f \in C^2(\mathbf{R})$ e $f''(x) \geq c > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(0) + xf'(0) + \frac{c}{2}x^2 \quad \forall x.$

ESERCIZIO 3 Sia $f \in C^2(\mathbf{R})$ tale che $f''(x) \geq c > 0 \quad \forall x$. Mostrare che f' é biiettiva e che

$$f^*(y) := \sup_x [xy - f(x)] = y(f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y))$$

Calcolare esplicitamente f^* se $f(x) := \frac{|x|^p}{p}, \quad p > 2$.

TEMA/ESERCIZIO 4 Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Dire cosa significa la frase 'f é integrabile in $\mathbf{R}$ in senso improprio' e provare che

$$\sup_R \int_{-R}^{R} |f| < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{é integrabile in senso improprio in} \quad \mathbf{R}$$

Mostrare anche che f puó essere integrabile in senso improprio in $\mathbf{R}$ senza che risulti $\sup_R \int_{-R}^{R} |f| < +\infty$.

4.1. Stabilire se esistono i seguenti integrali (impropri)

$$\int_0^{+\infty} \sin(\cosh x) dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cosh(\sin x) dx$$

4.2 Trovare, integrando per parti ripetutamente, una formula per

$$I_n := \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \qquad J_{2n+1} := \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad J_{2n} := \int_0^\infty x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

TEMA/ESERCIZIO 5 Siano f_n integrabili in senso improprio in $[0, +\infty)$. Supponiamo che f_n convergano uniformemente in $[a, +\infty)$ ad f, per ogni $a > 0$.
Mostrare che se f_n é equidominata in $[0, +\infty)$ allora f_n ed f sono assolutamente integrabili in $[0, +\infty)$ e $\int_0^\infty f_n(x) dx \to_n \int_0^\infty f(x) dx$.
Mostrare con un controesempio che l'ipotesi di equidominatezza é essenziale.

5.1 Calcolare, se esistono, $\lim_n \int_0^\infty \sin x \, e^{-\frac{x}{n}} dx, \quad \lim_n \int_0^\infty \cos x \, e^{-\frac{x}{n}} dx$

5.2 Stabilire se si puó integrare per serie e calcolare, in caso affermativo,

$$\int_0^\infty [\sum_{n=1}^\infty \frac{(n^2+1)\sin(nx)}{n!}] e^{-x} dx$$